POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 18 i 24 na krótszej przyprostokątnej, jako na średnicy, zbudowano okrąg. Jaką długość mają odcinki, na które ten okrąg podzielił przeciwprostokątną?

2. Jaką resztę z dzielenia przez 100 daje liczba $123456789^2 + 123456789$?

3. Uzasadnij, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $4^n + 2^n$ dzieli się przez 10.

4. Czy istnieje wielościan, który ma dokładnie siedem krawędzi?

5. Ile jest różnych trójkątów o bokach całkowitej długości, których najdłuższy bok ma długość 10? Pisząc "różne trójkąty" mamy na myśli trójkąty, które nie są przystające.

6. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej z nich mają długości 4 i 12, a odcinki drugiej pozostają w stosunku $1:4$. Ile wynosi długość drugiej cięciwy?

7. Czy istnieje wielomian stopnia piątego o współczynnikach całkowitych, którego miejscem zerowym jest $\sqrt{5} - \sqrt{2}$? Jesli tak, podaj przykład takiego wielomianu.

8. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $n!$ jest podzielna przez n^2?

9. Oblicz sumę
$$[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + [\log_2 4] + \ldots + [\log_2 127],$$
gdzie dla liczby rzeczywistej x symbol $[x]$ oznacza jej część całkowitą, czyli największą liczbę całkowitą, która nie przekracza x.

10. Jacek i Placek podjęli się wykonania pewnej liczby plakietek. Każdy z nich planował pracować z odpowiednią dla siebie wydajnością, robiąc po tyle samo plakietek dziennie z tym, że wydajność Jacka jest równa $66\frac{2}{3}\%$ wydajności Placka. Wstępne obliczenia wykazały, że na wykonanie całego zamówienia potrzebują dokładnie 12 dni. Niestety, po trzech dniach pracy Jacek musiał wyjechać i nad pozostałymi plakietkami Placek pracował sam (nie zwiększając swojej dziennej normy). W ciągu ilu dni zostanie wykonane zamówienie?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy krótszą przyprostokątną trójkąta ABC przez BC (C - wierzchołek kąta prostego), środek okręgu przez O oraz punkt przecięcia przeciwprostokątnej przez okrąg - inny niż B - przez S. Widzimy, że $\measuredangle BSC$ jest prosty (oparty na średnicy), zatem CS jest wysokością w trójkącie ABC idącą na przeciwprostokątną. Ponieważ $AB = 30$ (z tw. Pitagorasa), to z podobieństwa trójkątów BSC i BCA znajdujemy $BS = 10,8$, a wtedy $SA = 19,2$.

2. Ponieważ $123456789^2 + 123456789 = 123456789(123456789 + 1) = 123456789 \cdot 123456790$, to dwucyfrowa końcówka wyniku - bo ją tak naprawdę trzeba wyliczyć w zadaniu - wynosi tyle co dwucyfrowa końcówka wyniku $89 \cdot 90$ (wynika to z algorytmu mnożenia pisemnego). Zatem jest to 10.

3. Zauważmy, że cyfry jedności liczb 4^n tworzą ciąg okresowy, w którym powtarza się dwuelementowa sekwencja $(4, 6)$. Podobnie, cyfry jedności liczb 2^n tworzą ciąg okresowy, w którym powtarza się czteroelementowa sekwencja $(2, 4, 8, 6)$. Widzimy zatem, że gdy n będzie postaci $4k + 2$, to 4^n będzie miało cyfrę jedności 6, a 2^n - cyfrę 4. Ich suma zatem będzie zakończona zerem.

4. Nie. Zauważmy, że każdy wielościan, który ma choć jedną ścianę niebędącą trójkątem, musi mieć co najmniej 8 krawędzi. Rzeczywiście, weźmy ścianę, która nie jest trójkątem i użyjmy jej jako podstawy. Wtedy w podstawie wielościanu jest już n krawędzi (gdzie n oznacza liczbę wierzchołków podstawy) oraz dodatkowo, z każdego wierzchołka podstawy wychodzi co najmniej jedna krawędź nieleżąca w płaszczyźnie podstawy, czyli co najmniej kolejne n krawędzi. Daje to razem co najmniej $2n$ krawędzi, a skoro $n \geqslant 4$, to $2n \geqslant 8$. Jeśli zaś każda ściana wielościanu jest trójkątem, to wtedy liczba krawędzi wynosi $\frac{3}{2}s$, gdzie s jest liczbą ścian (s ścian po 3 krawędzie, w tym każda krawędź liczona dwa razy). Ale równanie $\frac{3}{2}s = 7$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych.

5. Oznaczając długości pozostałych boków trójkąta przez x i y, możemy warunki zadania zapisać w postaci:
$$0 < x \leqslant 10, \quad 0 < y \leqslant 10, \quad x + y > 10.$$
Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $x \leqslant y$. Wtedy widzimy, że $6 \leqslant y \leqslant 10$. Co więcej, dla każdego takiego y musi być $10 - y < x \leqslant y$, co daje $2y - 10$ możliwości na x. Zatem dla $y = 6$ mamy 2 możliwości na x, dla $y = 7$ są 4 możliwości, itd. aż do $y = 10$, dla którego jest 10 możliwości na x. Wystarczy zsumować: $2+4+6+8+10 = 30$. Otrzymane trójkąty są oczywiście różne, bo każde dwa mają co najmniej jeden bok innej długości.

   Zadanie można także rozwiązać posługując się układem współrzędnych oraz interpretacją powyższych nierówności. Wyznaczają one obszar będący ćwiartką kwadratu i wystarczy policzyć ile punktów kratowych jest w niej ukrytych.

6. Oznaczając pierwszą z cięciw przez AB, drugą przez CD, zaś ich punkt przecięcia przez P, widzimy, że trójkąty APC oraz DPB są podobne. Rzeczywiście, $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ jako kąty oparte na tym samym łuku. Podobnie $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$. Z podobieństwa wynika m.in. $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$. Przyjmując, bez zmniejszania ogólności, że $AP = 4$, $BP = 12$, $CP = x$ i $DP = 4x$ otrzymujemy zależność $4x^2 = 48$, co daje $x = 2\sqrt{3}$. Długość cięciwy CD wynosi więc $x = 10\sqrt{3}$.

7. Zauważmy, że $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 = 7-2\sqrt{10}$. Jeśli zatem znajdziemy wielomian $W(t) = at^2+bt+c$, którego pierwiastkiem jest $7-2\sqrt{10}$, to wykonując podstawienie $t = x^2$ otrzymamy wielomian, którego pierwiastkiem jest $\sqrt{5}-\sqrt{2}$. Przykładem wielomianu W jest np. $W(t) = t^2-14t+9$ (można go łatwo znaleźć ze wzorów Viete'a przyjmując $t_1 = 7-2\sqrt{10}$, $t_2 = 7+2\sqrt{10}$), zatem wielomian x^4-14x^2+9 byłby szukanym wielomianem, ale ma za mały stopień. Wystarczy jednak, że pomnożymy go np. przez x (lub przez $2x-3$, $x+7$ itp.). Ostateczna odpowiedź to: taki wielomian istnieje, np. x^5-14x^3+9x.

8. Dla $n = 1$ mamy podzielność, a np. dla $n = 4$ nie. Zauważmy, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $n!$ nie dzieli się przez n^2, gdyż w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n!$ czynnik n wystąpi tylko w pierwszej potędze. Jeśli zaś n jest liczbą złożoną większą niż 4, to $n = k\cdot l$ dla pewnych liczb naturalnych mniejszych od n oraz co najmniej jedna z tych liczb jest większa niż 2. Jeśli więc $k \neq l$, to oba czynniki k i l występują w iloczynie $n!$. Jeśli zaś $k = l$, to wobec $k > 2$ mamy $2k < n$, czyli w iloczynie $n!$ wystąpi zarówno czynnik k jak i $2k$. Widzimy więc, że $n!$ jest podzielne przez n^2 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną większą niż 4 lub $n = 1$.

9. Zauważmy, że niektóre z tych logarytmów dają się łatwo wyliczyć, gdyż $\log_2 2^n = n$. Jeśli zaś dla liczby naturalnej k mamy $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ (a takich liczb jest dokładnie 2^n), to $n \leqslant \log_2 k < n+1$, więc $[\log_2 k] = n$. W takim razie rozważana suma jest równa:

$$0+2^1\cdot 1+2^2\cdot 2+2^3\cdot 3+2^4\cdot 4+2^5\cdot 5+2^6\cdot 6,$$

co daje 642.

10. Jeżeli przyjmiemy, że Placek wykonywał dziennie x-ową część zamówienia, to wtedy Jacek wykonywał $\frac{2}{3}x$. Zatem razem wykonywali $\frac{5}{3}x$ całego zamówienia. Z treści zadania wynika, że $12\cdot\frac{5}{3}x = 1$, zatem $x = \frac{1}{20}$. Wiemy więc, że Placek wykonywał dziennie $\frac{1}{20}$ całego zamówienia. Przez trzy dni Jacek i Placek zdążyli wykonać tylko $\frac{1}{4}$ zamówienia, zatem Placek musiał samodzielnie wykonać jeszcze $\frac{3}{4}$ zamówienia, pracując tempem $\frac{1}{20}$ zamówienia na dzień. Zajmie mu to $\frac{3}{4} : \frac{1}{20} = 15$ dni. Ostatecznie, praca zostanie wykonana w ciągu 18 dni.