POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Czy jeżeli liczby $7x$ i $11x$ są całkowite, to liczba x też musi być całkowita?
2. Punkt P leży wewnątrz sześcianu o krawędzi długości $\sqrt{3}$. Ile wynosi minimalna suma odległości punktu P od wszystkich wierzchołków sześcianu?
3. Ile liczb naturalnych od 1 do 2015 jest podzielnych przez 10 lub 25?
4. Czy istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma w zapisie dziesiętnym dokładnie 3 jedynki, 2 dwójki, 3 trójki, 4 czwórki i 5 piątek? (Inne cyfry nie występują.)
5. Czy jeśli pomiędzy każde dwie kolejne cyfry liczby 121 wstawimy tyle samo zer, to otrzymamy kwadrat liczby naturalnej?
6. Po okręgu o długości 160 cm poruszają się dwa punkty, każdy ze stałą prędkością. Jeżeli kierunki ich ruchów są zgodne, to punkt pierwszy wyprzedza punkt drugi co 10 sekund. Jeżeli zaś kierunki ruchów są przeciwne, to punkty mijają się co 4 sekundy. Ile wynoszą prędkości tych punktów?
7. W okręgu o środku O i promieniu 8 poprowadzono średnicę AB oraz cięciwę CD, która przecina AB w punkcie P takim, że $AP = PO$. Uzasadnij, że $PC = OC$ jeśli wiadomo, że $PD = 6$.
8. Wiadomo, że liczby naturalne n i k spełniają równość $7 \cdot n = 13 \cdot k$. Uzasadnij, że liczba $n + k$ jest złożona.
9. Obwód pewnego czworokąta wypukłego wynosi 36 cm. Jedna z przekątnych tego czworokąta dzieli go na dwa trójkaty o obwodach 24 cm oraz 20 cm. Czy jest to krótsza, czy dłuższa przekątna tego czworokąta?
10. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ jest ciągiem arytmetycznym. Wiadomo, że suma wszystkich jego wyrazów jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz tego ciągu jest liczbą wymierną?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Tak. Zauważmy, że skoro $11x$ jest liczbą całkowitą, to również $2 \cdot 11x = 22x$ musi być liczbą całkowitą. Analogicznie widzimy, że liczba $3 \cdot 7x = 21x$ też jest całkowita. W takim razie ich różnica, czyli $22x - 21x$ także musi być liczbą całkowitą.

2. Zauważmy, że przekątne sześcianu mają długość 3. Oznaczmy przez A i G dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu. Wtedy, na mocy nierówności trójkąta, $PA + PG \geqslant AG = 3$. Analogiczne nierówności zachodzą dla pozostałych trzech par przeciwległych wierzchołków. Zatem suma odległości punktu P od wszystkich ośmiu wierzchołków sześcianu nie może być mniejsza niż $4 \cdot 3$, czyli 12. Co więcej, biorąc za punkt P punkt przecięcia się wszystkich czterech przekątnych (należy krótko uzasadnić, że przecinają się one w jednym punkcie), otrzymujemy sumę odległości od wierzchołków równą dokładnie 12. Odpowiedź to 12.

3. Zastosujemy prawo włączeń i wyłączeń. Ponieważ $2015 : 10 = 201\ r.\ 5$, to liczb podzielnych przez 10 jest 201. Analogicznie, mamy $2015 : 25 = 80\ r.\ 15$, więc liczb podzielnych przez 25 jest 80. Niestety, nie wystarczy dodać otrzymanych wyników, gdyż wtedy niektóre liczby zostałyby policzone dwa razy. Mowa oczywiście o liczbach, które dzielą się zarówno przez 10, jak i przez 25, czyli są wielokrotnościami 50. Takich liczb jest 40, bo $2015 : 50 = 40\ r.\ 15$. Ostatecznie, liczb wskazanych w zadaniu jest $201 + 80 - 40 = 241$.

4. Nie. Zauważmy, że suma cyfr kwadratu to $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5$, czyli 57. Jednak liczba 57 dzieli się przez 3 i nie dzieli się przez 9, zatem liczba o takich cyfrach nie może być kwadratem liczby naturalnej.

5. Tak. Wynika to z prostej obserwacji
$$1\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ zer}}2\underbrace{00\ldots00}_{n\text{ zer}}1 = 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 1 = (10^{n+1} + 1)^2.$$

6. Oznaczając przez x prędkość pierwszego punktu oraz przez y prędkość drugiego punktu widzimy, że pierwszy punkt przebywa w ciągu 10 sekund taką trasę jak drugi punkt powiększoną o 160 cm, zaś drogi przebyte przez oba punkty w ciagu 4 sekund sumują się do 160 cm. Otrzymujemy zatem układ: $10x = 160 + 10y$ oraz $4x + 4y = 160$, który ma jedno rozwiązanie $x = 28$ cm/s, $y = 12$ cm/s.

7. Z danych zadania wnioskujemy, że $AP = 4$, $BP = 12$ oraz $DP = 6$. Ponieważ trójkąty PAD i PBC są podobne (cecha kkk), to $PC = \frac{AP \cdot BP}{DP} = \frac{4 \cdot 12}{6} = 8 = OC$, co należało wykazać.

8. Zauważmy, że $7n + 7k = 13k + 7k = 20k$, zatem 20 dzieli $7(n + k)$. Co oznacza, wobec faktu, że liczba 7 jest pierwsza, że 20 dzieli $n + k$.

9. Dla ustalenia uwagi nazwijmy czworokąt $ABCD$ i przyjmijmy, że rozważana przekątna to AC. Długość AC możemy wyliczyć z podanych obwodów: $2 \cdot AC = (24+20) - 36 = 8$, czyli $AC = 4$ cm. Oznacza to, że bok AC jest bokiem krótszym od pozostałych zarówno w trójkącie ABC, jak i w trójkącie ACD. Rzeczywiście, gdyby któryś z innych boków w którymkolwiek z tych trójkątów był krótszy niż 4 cm (lub równy), to wtedy trzeci bok w tym trójkącie musiałby być krótszy niż 8 cm, a więc obwód takiego trójkąta byłby mniejszy niż 16 cm, wbrew danym podanym w zadaniu. Wynika stąd, że zarówno $\measuredangle ABC$, jak i $\measuredangle ADC$ są najmniejszymi kątami w "swoich" trójkątach i każdy z nich ma mniej niż $60°$. To oznacza, że przynajmniej jeden z pozostałych kątów czworokąta $ABCD$ jest rozwarty. Przyjmijmy, że jest to $\measuredangle BAD$ (rozumowanie w przypadku $\measuredangle BCD$ jest analogiczne). Wtedy odcinek BD jest najdłuższym bokiem trójkąta ABD, w szczególności jest dłuższy niż bok AB, który to jest dłuższy niż AC. Ostatecznie pokazaliśmy, że przekątna, o której mowa w zadaniu jest krótszą przekątną czworokąta ABC.

10. Tak. Suma wszystkich wyrazów to $\frac{a_1+a_{2015}}{2} \cdot 2015$, gdzie $a_{2015} = a_1 + 2014r$. Zatem wiemy, że $\frac{a_1+a_1+2014r}{2}$ jest liczbą wymierną, ale to jest przecież równe $a_1 + 1007r$, czyli a_{1008}.