POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Ile jest takich liczb całkowitych n, dla których liczba $n^2 + 4n + 9$ jest podzielna przez $n + 1$?

2. Okrąg podzielono trzema punktami A, B C na trzy części w stosunku $5 : 6 : 7$. Następnie w punktach A, B, C poprowadzono styczne do tego okręgu, które przecięły się parami w trzech punktach M, N, P. Pokazać, że dwusieczna największego kąta trójkąta MNP dzieli ten trójkąt na dwa, z których jeden jest podobny do trójkąta MNP.

3. Wśród liczb trzycyfrowych jest x liczb o iloczynie cyfr równym 12 oraz y liczb o sumie cyfr mniejszej niż 4. Ile wynosi $\frac{x}{y}$?

4. W deltoidzie $ABCD$ obie przekątne mają taką samą długość jak dłuższe boki tego deltoidu. Czy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg?

5. Jeśli przez n oznaczymy najmniejszą liczbę naturalną o sumie cyfr 100, to jak nazywa się liczba $n + 1$?

6. Pewną liczbę naturalną n podniesiono do potęgi 30 i otrzymano liczbę

$$42\ 391\ 158\ 275\ 216\ 203\ 514\ 294\ 433\ 201.$$

   Ile wynosi n?

7. Kwadrat o polu 144 cm^2 ma wspólną przekątną z prostokątem. Figura, która jest częścią wspólną kwadratu i prostokąta, ma pole równe 36 cm ^{2}. Ile wynosi pole prostokąta?

8. Ile minut po północy wskazówki zegara po raz pierwszy w danej dobie utworzą kąt $163°$?

9. Cukier "Kryształowy" zawiera $0,22\%$ zanieczyszczeń, a cukier "Luksusowy" tylko $0,14\%$. Jaki procent zanieczyszczeń ma mieszanka otrzymana z pomieszania cukru "Kryształowego" z cukrem "Luksusowym" w proporcji $3 : 1$?

10. Liczba naturalna M ma tę własność, że powiększona o sumę swoich cyfr daje 2015. Ile wynosi M?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że $n^2 + 4n + 9 = (n + 1)(n + 3) + 6$, stąd liczba $n^2 + 4n + 9$ jest podzielna przez $n + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1$ dzieli 6. Zatem $n + 1$ musi być jedną z liczb $1, 2, 3, 6$ lub $-1, -2, -3, -6$. Daje to 8 różnych możliwości na n.

2. Oznaczając środek okręgu przez O, z treści zadania wnioskujemy, że $\measuredangle AOB = 100°$, $\measuredangle BOC = 120°$ oraz $\measuredangle COA = 140°$. Pamiętając o tym, że odcinki AO, BO i CO są prostopadłe do odpowiednich stycznych, widzimy, że kąty trójkąta MNP wynoszą $80°$, $60°$ i $40°$. Dwusieczna kąta o mierze $80°$ dzieli więc trójkąt MNP na dwa trójkąty, z których jeden ma kąty $80°$, $60°$ i $40°$. To kończy dowód.

3. Zaczniemy od znalezienia wszystkich liczb trzycyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 12. Ponieważ $1 \cdot 2 \cdot 6$, $1 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 2 \cdot 3$, są jedynymi rozkładami liczby 12 na iloczyn trzech czynników jednocyfrowych, to (uwzględniając permutacje) widzimy, że takich liczb będzie $6 + 6 + 3$, czyli $x = 15$. Jeśli zaś interesują nas liczby trzycyfrowe o sumie cyfr mniejszej niż 4, to możemy osobno zliczyć te, których suma cyfr wynosi jeden (jest tylko jedna taka liczba: 100), te, których suma cyfr wynosi dwa (są tylko trzy takie liczby: 200, 110, 101) oraz te, których suma cyfr wynosi trzy (jest dokładnie sześć takich liczb: 300, 210, 201, 120, 102, 111). Zatem $y = 10$, czyli ostaetcznie $\frac{x}{y} = 1,5$.

4. Nie. Kąt pomiędzy dłuższymi bokami deltoidu ma bowiem miarę $60°$, zaś leżący naprzeciwko kąt między dwoma krótszymi bokami ma miarę $150°$.

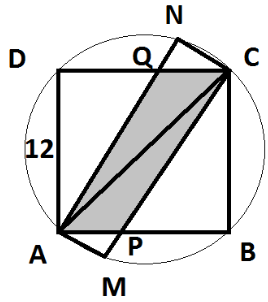
5. Najmniejsza liczba o sumie cyfr 100 musi mieć jak najmniej cyfr, zatem maksymalnie wiele dziewiątek. Będzie to więc liczba

$$1\underbrace{99\ldots99}_{\text{11 dziewiątek}}$$

   Zatem $n + 1$ to *dwieście miliardów*.

6. Ponieważ $n^{30} < 10^{30}$, to n jest liczbą jednocyfrową. Suma cyfr liczby n^{30} wynosi 99, zatem liczba n musi być podzielna przez 3. Jednak n nie może być równe 6, bo wówczas i liczba n^{30} byłaby parzysta. Widzimy też, że $3^{30} = 9^{15} < 10^{15}$, zatem $n \neq 3$. Pozostaje jedyna możliwość $n = 9$.

7. Zauważmy, że jeśli prostokąt ma wspólną przekątną z kwadratem, to wierzchołki prostokąta leżą na okręgu opisanym na kwadracie. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Bok kwadratu ma długość 12 cm, zatem skoro pole równoległoboku $APCQ$ wynosi 36 cm^2, to $AP = 3$ cm oraz $PB = 9$ cm. Z tw. Pitagorasa dla trójkata PBC otrzymujemy $PC = 15$ cm. Skoro cięciwy AB i CM przecinają się w punkcie P, to $AP \cdot PB = CP \cdot PM$ (trójkąty AMP i CBP są podobne – cecha kkk), a stąd $MP = 1,8$ cm. Jeszcze raz stosując tw. Pitagorasa - tym razem dla trójkąta AMP - dostajemy $AM = 2,4$ cm. Pole prostokąta wynosi zatem $2,4 \cdot 16,8 = 40,32$ cm^2.



8. Zauważmy, że wskazówka godzinowa porusza się z prędkością kątową $\frac{1}{2}^\circ$/min, a wskazówka minutowa z prędkością 6°/min. Zatem po czasie $t < 60$ min wskazówka minutowa obróci się o $6t$ stopni, a godzinowa tylko o $\frac{1}{2}t$. Kąt, który między nimi powstanie będzie miał $6t - \frac{1}{2}t$ stopni, więc będzie równy 163° dla $t = 29\frac{7}{11}$ min.

9. Treść zadania możemy przedstawić za pomocą zależności $0,22 \cdot 3m + 0,14 \cdot m = p \cdot 4m$, gdzie m jest wagą cukru "Luksusowego" wziętego do sporządzenia mieszanki, a p jest szukanym procentem zanieczyszczeń. Po rozwiązaniu otrzymujemy $p = 0,2$. Mieszanka zawiera $0,2\%$ zanieczyszeń.

10. Ponieważ $M < 2015$, to suma cyfr liczby M wynosi maksymalnie 28 (dla liczby 1999). Można zatem dla kolejnych liczb naturalnych k z zakresu od 1 do 28 sprawdzić, czy liczba $M - k$ ma sumę cyfr równą k. Można też zawęzić obszar poszukiwań korzystając z faktu, że suma cyfr danej liczby daje taką samą resztę z dzielenia przez 3 jak wyjściowa liczba, więc skoro 2015 daje resztę 2, to zarówno liczba M jak i suma jej cyfr musi dawać resztę 1. To spostrzeżenie ogranicza zakres rozważanych k do przypadków $1, 4, 7, \ldots, 28$. Po sprawdzeniu otrzymujemy dwie możliwości na M: 1993 oraz 2011.