

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ

1. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 2016 jako sumę kolejnych liczb całkowitych dodatnich (co najmniej dwóch)?

2. Rozwiąż równanie

$$(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$$

3. Pokaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b spełniają równanie

$$(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1,$$

to $a + b = 0$.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku długości 1 obrano punkty P i Q na bokach AB i AD odpowiednio. Obwód trójkąta APQ wynosi 2. Pokaż, że kąt PCQ ma miarę 45° .

5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$a^a b^b \geq a^b b^a$$

6. Jaka jest największa trzycyfrowa liczba pierwsza, której wszystkie cyfry są różne i też są pierwsze?

7. Dany jest trójkąt o polu S , bokach a, b, c i kącie α naprzeciw boku a . Pokaż, że

$$S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)^2.$$

8. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające układ nierówności

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| \geq 0 \\ |x - 1| + y \leq 2 \end{cases}$$

9. Rozważmy ciąg arytmetyczny a_1, a_2, a_3, \dots . Przez S_n oznaczmy sumę jego pierwszych n wyrazów. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi

$$S_{3k} = 3(S_{2k} - S_k).$$

10. Liczba M ma 2016 cyfr i tę własność, że każde dwie kolejne cyfry tworzą liczbę podzielną przez 17 lub 23. Wiadomo, że cyfrą jedności tej liczby jest 5. Jaka jest jej pierwsza cyfra?