UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych układ równań
$$\begin{cases} ab + cd = -1 \\ ac + bd = -1 \\ ad + bc = -1 \end{cases}$$
2. Oblicz długości promienia r sfery wpisanej i R sfery opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 1 i wysokości h.
3. Rozstrzygnij, czy istnieją funkcje f i g określone na zbiorze liczb rzeczywistych, takie że dla dowolnych x i y zachodzi równość $f(x) \cdot g(y) = x + y + 1$.
4. Siedemnastokąt opisany na okręgu ma wszystkie boki równej długości. Pokaż, że jest on foremny.
5. Rozwiąż równanie $x = \sqrt{a - \sqrt{a+x}}$ z niewiadomą x i parametrem a.
6. Pokaż, że $(n-1)n(n+1)(n+2)+1$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby całkowitej n.
7. Dane są kolejne liczby naturalne od 1 do 2016. Określić, ile wynosi największa liczba m o tej własności, że jeśli spośród tych liczb usuniemy dowolne m liczb, to i tak wśród pozostałych znajdziemy dwie takie, że jedna z nich jest podzielna przez drugą.
8. Czy trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach całkowitych a, b i c może mieć wyróżnik równy 23?
9. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich (x, y) takie, że $x + y = a^n$ oraz $x^2 + y^2 = a^m$ dla pewnych liczb naturalnych a, n, m.
10. W jakim trójkącie środki wszystkich trzech wysokości leżą na jednej prostej?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Parami odejmując równania stronami otrzymamy równości $(a-b)(c-d)=0,\ (a-c)(b-d)=0,\ (a-d)(b-c)=0$. Wynika, z nich, że $a=b$ lub $c=d$, $a=c$ lub $b=d$, $a=d$ lub $b=c$, czyli co najmniej trzy z tych liczb są równe. Przypuśćmy, że są to b, c i d. Mamy wtedy $ab+b^2=-1$, czyli $(a+b)b=-1$, co daje $a=-2, b=1$ albo $a=2, b=-1$. Ogólnie zatem jedna z liczb jest równa 2, a pozostałe -1 albo jedna równa -2, a pozostałe 1.

2. Krawędź boczna ma długość $b=\sqrt{h^2+1/2}$, a wysokość ściany bocznej $h_1=\sqrt{h^2+1/4}$. R możemy obliczyć jako promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach $b, b, \sqrt{2}$, a więc
$$R=\frac{\sqrt{2}\cdot b\cdot b}{4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}h}=\frac{2h^2+1}{4h}.$$
Podobnie r jest promieniem koła wpisanego w trójkat o bokach $1, h_1, h_1$, czyli
$$r=\frac{h}{1+\sqrt{1+4h^2}}.$$

3. Przypuśćmy, że takie funkcje istnieją. Wówczas z równości $f(0)\cdot g(0)=1$ wynika, że $f(0)\neq 0$. Podobnie z $f(1)\cdot g(-1)=1$ wynika, że $g(-1)\neq 0$. Ale $f(0)\cdot g(-1)=0$. Wobec tej sprzeczności szukane funkcje nie istnieją.

4. Oznaczmy środek okręgu przez O, wierzchołki siedemnastokąta przez $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$, a punkt styczności boku A_iA_{i+1} przez S_i ($A_{17}A_1$ przez S_{17}). Przypuśćmy, że S_1 nie jest środkiem boku, ale np. $A_1S_1<\frac{1}{2}a$, gdzie a jest długością boku siedemnastokąta. Wówczas z przystawania trójkątów prostokątnych S_1OA_2 i S_2OA_2 mamy $A_2S_2=A_2S_1$, czyli $A_2S_2>\frac{1}{2}a$. Biegnąc tak dalej wokół okręgu zobaczymy, że $A_{17}S_{17}<\frac{1}{2}a$, co oznacza, że $A_1S_1=A_1S_{17}>\frac{1}{2}a$. A to oznacza sprzeczność.

   Skoro punkty styczności są środkami boków, to wszystkie trójkąty postaci OA_iS_i i OS_iA_{i+1} są przystające, a więc siedemnastokąt jest foremny.

5. Równanie jest równoważne warunkom

   (1) $\quad (x^2-a)^2=a+x,\ x\geqslant 0,\ a\geqslant x^2.$

   Oczywiście dla $a<0$ rozwiązań nie ma. Dla $a=0$ jedynym rozwiązaniem jest $x=0$. Przepiszmy powyższe równanie w postaci $a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$ i rozwiążmy względem a. Otrzymujemy $2a=2x^2+1\pm(2x+1)$. Rozwiązując te dwa równania względem x i uwzględniając warunek $x\geqslant 0$ otrzymujemy liczby

   $y=0,5+\sqrt{0,25+a},\quad z=-0,5+\sqrt{a-0,75}.$

   Łatwo sprawdzić, że $z\geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\geqslant 1$.

Pozostaje do sprawdzenia ostatni z warunków (1). Ponieważ $y > \sqrt{a}$, to $a - y^2 < 0$, zatem y nie jest rozwiązaniem. Natomiast $z < \sqrt{a}$, więc $a - z^2 > 0$.

Ostatecznie $x = 0$, jeżeli $a = 0$, a jeśli $a \geqslant 1$, to $x = z$. Dla pozostałych wartości a rozwiązań nie ma.

6. $$(n-1)n(n+1)(n+2) + 1 = (n^2+n-2)(n^2+n) + 1 = (n^2+n-1)^2.$$

7. Największe m o tej własności wynosi 1007. Jest bowiem oczywiste, że jeśli weźmiemy $m \geqslant 1008$ i usuniemy liczby $1, 2, \ldots, m$, to zostaną nam liczby $m+1, m+2, \ldots, 2016$, przy czym $m + 1 \geqslant 1009$, zatem dla każdej pary liczb z tego zbioru iloraz większej przez mniejszą jest mniejszy niż 2, co oznacza, że żadna nie jest podzielna przez żadną. Pokażmy teraz, że $m = 1007$ jest dobre. Jeśli spośród liczb $1, 2, \ldots, 2016$ usunęliśmy pewne 1007, to i tak zostało ich 1009, a każdą liczbę, która pozostała możemy zapisać jednoznacznie w postaci $2^k \cdot l$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą nieujemną, a l jest liczbą nieparzystą mniejszą niż 2016. Ponieważ liczb nieparzystych od 1 do 2015 jest tylko 1008, to któreś dwie spośród pozostawionych liczb muszą mieć w takim rozkładzie tę samą liczbę nieparzystą, oznaczmy ją l_0. Zatem większa z nich jest postaci $2^{k_1} \cdot l_0$, a mniejsza postaci $2^{k_2} \cdot l_0$, gdzie $k_1 > k_2$. Widzimy więc, że $2^{k_1} \cdot l_0$ dzieli się przez $2^{k_2} \cdot l_0$ (dając w wyniku $2^{k_2 - k_1}$).

8. Nie może. Kwadraty liczb całkowitych dają przy dzieleniu przez 4 resztę 0 lub 1. Zatem wyróżnik trójmianu ($b^2 - 4ac$) również musi dawać resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4, a 23 daje resztę 3.

9. Rozwiązaniem są wszystkie pary $(2^k, 2^k)$, gdzie $k \geqslant 0$. Rzeczywiście, z założenia $a^{2n} = x^2 + y^2 + 2xy = a^m + 2xy > a^m$, co oznacza, że a^{2n} dzieli się przez a^m. Zatem także $2xy$ dzieli się przez a^m. Jednak $a^m = x^2 + y^2$, więc otrzymujemy $2xy \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2xy$, a stąd musi być $x^2 + y^2 = 2xy$, czyli $x = y$. W takim razie, $2x = a^n$, skąd $4x^2 = a^{2n}$, a skoro $2x^2 = a^m$, to $2 = a^{2n-m}$, co oznacza, że $a = 2$ zaś $x = y = 2^k$ dla pewnego $k \geqslant 0$.

10. Odpowiedź: W trójkącie prostokątnym. Łatwo stwierdzić, że w takim trójkącie tak jest w istocie. Trudniej pokazać, że w żadnym innym nie leżą na jednej prostej.

    Możemy tak nazwać wierzchołki trójkąta, by środki wysokości A_1, B_1, C_1, wychodzących odpowiednio z wierzchołków A, B, C, leżały na jednej prostej w tej kolejności. Rozważmy prostą k łączącą środki boków AB i BC. Punkt B_1 leży oczywiście na tej prostej.

    Jeśli kąt ABC byłby ostry, to spodki wysokości opuszczonych na boki AB i BC leżałyby po tej samej stronie punktu B, co wierzchołki A i C, a więc oba punkty A_1 i C_1 leżałyby po tej samej stronie prostej k (przeciwnej niż punkt B). Zatem punkt B_1 nie mógłby leżeć na odcinku A_1C_1.

    Podobnie, jeśli kąt ABC byłby rozwarty, to spodki wysokości leżałyby na przedłużeniach odpowiednich boków, a punkty A_1 i C_1 znów leżałyby po tej samej stronie prostej k. Wobec tego kąt przy wierzchołku B musi być kątem prostym.