UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ

1. Suma czterech liczb wynosi 120. Jakie to liczby, jeśli pierwsza z nich jest mniejsza od drugiej o 5, od trzeciej o 11, zaś od czwartej o 12?

2. Trzy prostokąty P_1, P_2 i P_3 zsunięto razem (bez dziur i nachodzenia na siebie) i otrzymano jeden duży prostokąt P. Wiadomo, że prostokąt P_1 ma wymiary $8\ cm \times 5\ cm$, zaś prostokąt P_2 ma wymiary $4\ cm \times 3\ cm$. Jakie są wymiary prostokąta P_3?

3. Dzień 1 grudnia 2015 roku to wtorek. Ile wtorków było w całym roku 2015?

4. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AB = BC = 15\ cm$ i $AC = 10\ cm$ poprowadzono prostą prostopadłą do boku AB i przechodzącą przez jego środek. Prosta ta przecięła bok BC w punkcie P. Ile wynosi obwód trójkata ACP?

5. Dwie drożdżówki i trzy pączki kosztują razem $8,40$ zł. Trzy takie same drożdżówki i sześć pączków kosztuje 15 zł. Co jest droższe: drożdżówka, czy pączek? O ile?

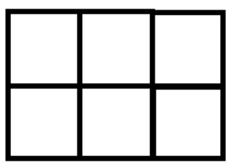
6. Matylda ma dwóch starszych braci. Iloczyn lat trojga tych dzieci jest równy 693, a suma ich lat wynosi 27. Ile lat ma Matylda?

7. W prostokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem boku BC, a punkt N jest środkiem boku CD. Oblicz pole trójkąta AMN, jeśli wiesz, że pole prostokąta $ABCD$ wynosi $40\ dm^2$.

8. Czy suma trzech kolejnych liczb dwucyfrowych może być liczbą pierwszą?

9. Mateusz kupił swoją ulubioną czekoladę wydając na nią $\frac{1}{5}$ swojego kieszonkowego. Za $\frac{1}{4}$ tego, co mu zostało kupił sobie paczkę żelków. Ile kieszonkowego dostał, jeśli po zakupach ma w kieszeni 12 zł?

10. Figura poniżej składa się z 6 kwadracików. Figurę tę można "poczernić", zaczerniając niektóre z tych kwadracików w taki sposób, aby zaczerniony był choć jeden kwadracik, jednak zaczernione kwadraciki nie mogą stykać się ani bokiem ani wierzchołkiem. Ile jest możliwych poczernień tej figury?



PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że druga liczba jest większa od pierwszej o 5, trzecia jest większa od pierwszej o 11, zaś czwarta jest większa od pierwszej o 12. Gdybyśmy więc zmniejszyli drugą, trzecią i czwartą liczbę odpowiednio o 5, 11 i 12 (zostawiając pierwszą bez zmian), to uzyskalibyśmy cztery równe liczby o sumie $120 - (5 + 11 + 12) = 92$, czyli każda z nich byłaby równa 23. W takim razie pierwszą liczbą jest 23, a kolejne to 28, 34, 35.

2. Patrząc na wymiary prostokątów P_1 i P_2 widzimy, że po zsunięciu jeden z boków prostokąta P_2 (a są dwa różne) musi stykać się z jednym z boków prostokąta P_1 (tu też są dwa różne) i to tak, że jeden z wierzchołków będzie wspólny. Mam więc cztery możliwości, które dają cztery możliwe rozwiązania: $3\ cm \times 4\ cm$, $4\ cm \times 5\ cm$, $1\ cm \times 3\ cm$, $2\ cm \times 4\ cm$. Zadanie uważamy za rozwiązane tylko wtedy, gdy podane są wszystkie cztery możliwości.

3. 52 wtorki. Rok zwykły (a taki był rok 2015) ma 52 tygodnie i jeden dzień. Zatem sześć dni tygodnia występuje w nim 52 razy, a tylko jeden dzień tygodnia 53 razy. To oczywiście ten z 31 grudnia, a w roku 2015 dzień 31 grudnia wypadł w czwartek (co można obliczyć z informacji, że dzień 1 grudnia 2015 roku to wtorek). Za rozwiązanie polegające na policzeniu (poprawnym) wtorków w kolejnych miesiącach proponujemy przyznać najwyżej 7 punktów.

4. Po narysowaniu trójkąta ABC oraz prostej, o której mowa w zadaniu (nazwijmy ją l), warto jeszcze narysować odcinek AP. Widzimy wtedy, że prosta l jest symetralną boku AB i dzieli trójkąt APB na dwa trójkąty przystające (oba trójkąty są prostokątne i przyprostokątne jednego są tej samej długości co drugiego), co daje $AP = PB$. A wtedy obwód trójkąta ACP możemy policzyć następująco: $CP + PA + AC = CP + PB + AC = CB + AC = 15 + 10 = 25\ (cm)$.

5. Jeśli dwie drożdżówki i trzy pączki kosztują razem $8,40$ zł, to podwajając te zakupy otrzymujemy, że cztery drożdżówki i sześć pączków kosztowałoby razem $16,80$ zł. Patrząc na drugą informację podaną w zadaniu, widzimy więc, że cena jednej drożdżówki to $1,80$ zł. W takim razie pączek kosztuje $1,60$ zł, co oznacza, że drożdżówka jest droższa o 20 groszy.

6. Wiek każdego z rodzeństwa jest dzielnikiem liczby 693 i jest mniejszy niż 27. Rozkładając liczbę 693 na czynniki pierwsze otrzymujemy $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, widzimy zatem, że jest tylko sześć dzielników mniejszych od 27: 1, 3, 7, 9, 11 i 21. Pamiętajmy jednak, że iloczyn trzech dzielników ma dać $3^2 \cdot 7 \cdot 11$, czyli w szczególności, któryś musi być podzielny przez 7 i któryś przez 11. Z wymienionych tylko dzielnik 11 dzieli się przez 11, a zatem wiek jednego z rodzeństwa jest równy 11. Oznacza to, że suma lat pozostałych dzieci wynosi 16. Z wymienionych dzielników tylko 7 dzieli się przez 7 i jest mniejszy od 16, więc wiek drugiego z rodzeństwa to 7. Trzecie dziecko ma zatem 9 lat. Matylda, jako najmłodsza, ma więc 7 lat.

7. Przedstawiając sytuację na rysunku warto zaznaczyć jeszcze punkt P - środek boku AD oraz punkt R - środek boku AB. Trójkąt AMN powstaje poprzez odcięcie od prostokąta $ABCD$ trzech trójkątów: ABM, MCN i AND. Zauważmy, że pole trójkąta ABM stanowi jedną czwartą pola prostokąta $ABCD$. Można się o tym przekonać rysując na nowo prostokąt $ABCD$ i zaznaczając w nim jedynie odcinki AM i PM. Analogicznie, widzimy, że pole trójkąta AND to jedna czwarta pola prostokąta $ABCD$. Jeśli zaś narysujemy prostokąt $ABCD$ i zaznaczymy w nim odcinki MP, NR, RM, MN, NP i PR, to łatwo uzasadniamy, że pole trójkąta MCN stanowi jedną ósmą pola prostokąta $ABCD$. Ostatecznie, odcięte trójkąty stanowią razem $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ pola prostokąta, tak więc trójkąt AMN ma pole równe $\frac{3}{8} \cdot 40 = 15$ (dm^2). Przyjęcie przez ucznia do obliczeń konkretnego prostokąta (np. 4 $dm \times 10$ dm) nie może być uznane za poprawne rozwiązanie zadania - proponujemy wtedy 5 punktów.

8. Oznaczając przez n, $n+1$, $n+2$ trzy kolejne liczby dwucyfrowe, widzimy, że ich suma to $3n+3$, czyli $3(n+1)$. Jest więc ona podzielna przez 3. Oczywiście wiemy też, że jest ona większa od 3. Podsumowując: nie może, bo dzieli się przez 3 i jest większa od 3 (za brak tej ostatniej uwagi w rozwiązaniu odejmujemy 1 punkt).

9. Po zakupie czekolady Mateuszowi zostało $\frac{4}{5}$ początkowej kwoty, a po kupieniu żelków $\frac{3}{4}$ z $\frac{4}{5}$, czyli $\frac{3}{5}$ początkowej kwoty (co stanowiło 12 zł). Wynika stąd, że początkowa kwota kieszonkowego to 20 zł. Sugerujemy, żeby rozwiązanie polegające na wskazaniu, że 20 zł "się zgadza", uzupełnione uwagami, że gdyby dostał więcej, to zostanie mu więcej, a gdyby dostał mniej, to zostanie mu mniej, uznać jako kompletne rozwiązanie.

10. Po prostym spostrzeżeniu, że zaczernionych kwadracików nie może być więcej niż dwa, pozostaje rozważyć dwa przypadki: w figurze zaczerniamy tylko jeden kwadracik (6 możliwości) lub w figurze zaczerniamy dwa kwadraciki (4 możliwości). Ostatecznie jest 10 możliwości poczernienia tej figury.