POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA I – rok szkolny 2015/2016

poziom: szkoły podstawowe

PÓŁFINAŁ

1. W roku 1999 Dorota miała tyle lat, ile wynosiła suma cyfr roku jej urodzenia. W którym roku będzie miała dwa razy więcej lat niż w 1999?

2. Czterocyfrowa liczba naturalna jest podzielna przez 3 i 5. Dwie pierwsze cyfry tworzą liczbę cztery razy większą od liczby utworzonej przez dwie ostatnie cyfry. Jaka to liczba?

3. Pień o długości 24 metry przepiłowano w poprzek tak, że jedna z części ma dwa razy więcej centymetrów długości niż druga decymetrów. Jaka jest długość każdej części?

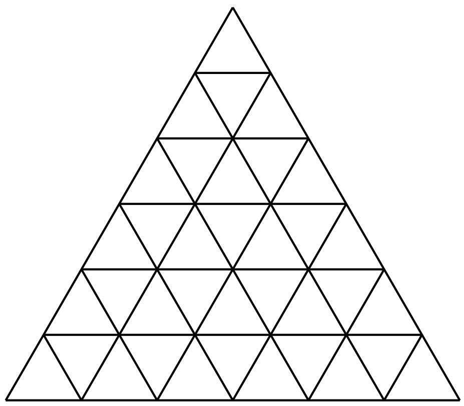
4. Dwie beczki zawierają razem 180 litrów wody. Z pierwszej beczki przelano do drugiej tyle litrów wody, by zawartość tej drugiej potroiła się. Następnie z drugiej przelano do pierwszej tyle litrów wody, by zawartość tej pierwszej uległa potrojeniu. Wówczas okazało się, że w obu beczkach znajduje się tyle samo wody. Ile wody było w pierwszej beczce na samym początku?

5. Ile liczb nieparzystych może występować wśród liczb
$$a,\ b,\ c,\ d,\ a\cdot b\cdot c+d,\ b\cdot c\cdot d+a,\ c\cdot d\cdot a+b,\ d\cdot a\cdot b+c,$$
jeśli a, b, c, d są liczbami naturalnymi?

6. Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeżeli podzielimy przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5.

7. Kwadrat o boku 15 cm podzielono linią prostą na dwa trapezy w taki sposób, że obwody otrzymanych figur różniły się o 12 cm. Podaj pole każdej z otrzymanych części.

8. Ile trójkątów można zobaczyć na tym rysunku?



9. Kwadratową serwetkę złożono na pół, a potem znowu na pół i otrzymano kwadrat. Tak złożoną serwetkę przecięto jednym cięciem prostoliniowym. Na ile części ją pocięto?

10. Na prostej l zaznaczono punkty A, B, C i D tak, że $AB = 1$, $BC = 2$ i $CD = 4$. Ile może wynosić AD?

PMM – rok szkolny 2015/2016 – poziom: szkoła podstawowa

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Suma cyfr liczby czterocyfrowej nie przekracza 36, więc Dorota urodziła się w XX wieku. Zapisując rok urodzenia jako $1900 + 10k + m$ (k i m to cyfry), otrzymujemy równanie $1999 - (1900 + 10k + m) = 1 + 9 + k + m$, czyli $11k + 2m = 89$. Ponieważ $0 \leqslant m \leqslant 9$, więc $71 \leqslant 11k \leqslant 89$, co daje $k = 7$ lub $k = 8$. Jednak tylko $k = 7$ daje całkowite m: $m = 6$. Ostatecznie, doszliśmy do wniosku, że Dorota urodziła się w roku 1976. W roku 1999 miała 23 lata, a dwa razy tyle będzie miała za kolejne 23 lata, czyli w 2022 roku.

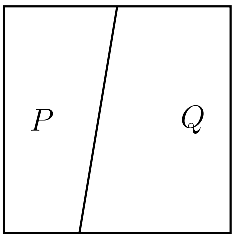
2. Oznaczmy liczbę utworzoną przez dwie ostatnie cyfry przez A. Wtedy $A < 25$ i rozważana liczba czterocyfrowa to $4A \cdot 100 + A = 401 \cdot A$. Skoro $401A$ ma być podzielne przez 3 i 5, to A musi być podzielne przez 3 i 5, czyli A jest dwucyfrową wielokrotnością 15 mniejszą niż 25. Musi być więc $A = 15$, a szukana liczba to 6015.

3. Niech druga część ma długość x dm. Z warunków zadania wynika, że pierwsza część ma długość $2x$ cm=0,2 x dm. Ponieważ suma tych długości wynosi 240 dm, to x=200. Zatem długość drugiej części wynosi 20 m, a pierwszej 4 m.

4. Zadanie najprościej rozwiązać "od końca". Po drugim przelewaniu w obu beczkach było tyle samo wody: po 90 litrów. Zatem przed drugim przelewaniem w pierwszej beczce musiało być 30 litrów, a w drugiej 150 litrów. W takim razie, przed pierwszym przelewaniem w pierwszej beczce było 130 litrów, a w drugiej 50 litrów.

5. To ile liczb nieparzystych występuje wśród $a \cdot b \cdot c + d, b \cdot c \cdot d + a, c \cdot d \cdot a + b, d \cdot a \cdot b + c$ zależy od tego ile ich jest wśród a, b, c, d. Jeśli wśród a, b, c, d wszystkie są parzyste, to pozostałe są też parzyste. Jeśli jedna z a, b, c, d jest nieparzysta, to wśród pozostałych też jedna. Jeśli dwie wśród a, b, c, d, to dwie wśród pozostałych. Jeśli trzy wśród a, b, c, d, to wszystkie pozostałe są nieparzyste, a jeśli a, b, c, d są nieparzyste, to pozostałe są parzyste. odpowiedź: Może wystąpić 0, 2, 4 lub 7 liczb nieparzystych.

6. Z danych wynika, że szukana liczba dzieli się zarówno przez 3 jak i przez 5. Jest więc wielokrotnością 15. Wystarczy zatem sprawdzić liczby 15, 30, 45, 60, 75 i 90. Z wymienionych tylko 75 spełnia podane warunki.

7. 

Przy podziale na trapezy różnica obwodów, to różnica w sumach długości podstaw. W mniejszym trapezie wynosi ona zatem $15 - 6 = 9$ cm, a w większym 21 cm. Pole mniejszego trapezu jest równe zatem $67,5\ \text{cm}^2$, a pole większego $157,5\ \text{cm}^2$.

8. Policzmy trójkąty $\triangle$. Tych o boku 1 jest $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, o boku 2 jest $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, podobnie 10 o boku 3, 6 o boku 4, 3 o boku 5 i 1 o boku 6. W sumie $21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$ trójkątów $\triangle$. Trójkątów $\bigtriangledown$ jest 22, bo 15 o boku 1, $1 + 2 + 3 = 6$ o boku 2 i jeden o boku 3. Większe już się nie mieszczą. Łącznie na rysunku widać 78 trójkątów.

9. W zależności od cięcia na: 2, 3, 4 lub 5 części.

10. Zauważmy, że AC może być równe 3 (gdy punkty A i C leżą po przeciwnych stronach punktu B) lub 1 (gdy A i C leżą po tej samej stronie punku B). W każdym z tych dwóch przypadków punkt D może leżeć na lewo lub na prawo od C. To daje 4 możliwości: $AD = 1$, $AD = 7$, $AD = 5$ lub $AD = 3$.