UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

1/8 FINAŁU – DOGRYWKA

1. Ze środka okręgu wpisanego w trójkąt widać boki trójkąta pod kątami $100^\circ, 120^\circ, 140^\circ$. Znajdź kąty tego trójkąta.

2. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach $AB = 10$, $CD = 8$ pewien okrąg o środku O będącym środkiem odcinka AB, jest styczny do ramion w ich środkach. Jaka jest długość ramienia trapezu ?

3. Jaś napisał liczbę dwucyfrową n i podwoił jej cyfrę dziesiątek. Następnie zamienił miejscami cyfry i otrzymał liczbę dwucyfrową trzykrotnie większą od n. Jaką liczbę napisał Jaś?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjalny

1/8 FINAŁU – DOGRYWKA – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy miary kątów trójkąta przez: 2α, 2β i $180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Odcinki łączące środek S okręgu z wierzchołkami trójkąta zawierają się w dwusiecznych kątów trójkąta i dzielą go na trzy mniejsze trójkąty o kątach przy wierzchołku S wymienionych w treści. Możemy zapisać układ równań: $\alpha + \beta + 100^\circ = 180^\circ$ i $\alpha + (90^\circ - \alpha - \beta) + 120^\circ = 180^\circ$. Po rozwiązaniu otrzymujemy miary kątów w rozważanym trójkącie: $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$.

2. Niech S będzie środkiem ramienia AD. Ponieważ OS jest jest wysokością trójkąta AOD i jednocześnie S jest środkiem boku AD, to trójkąt AOD jest równoramienny i $AO = DO = 5$. Niech P będzie spodkiem wysokości trapezu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D. Wtedy $PO = 4$ i z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta POD wnosimy, że $DP = 3$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APD otrzymujemy $AD = \sqrt{10}$.

3. Jeśli oznaczymy cyfrę dziesiątek liczby n przez x, a cyfrę jedności przez y, to widzimy, że x musi być mniejsza niż 5 (podwojone x dalej jest mniejsze niż 10). Treść zadania można zapisać równaniem: $10y+2x = 3(10x+y)$, które po redukcji przyjmuje postać $y = 4x$. Otrzymujemy stąd dwa rozwiązania: $n = 14$ lub $n = 28$.