POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

1/8 FINAŁU

1. Zapisz liczbę $2,1(102)$ w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

2. Wyjaśnij, która z liczb, a czy b, jest większa, jeśli:

$$a = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{6}}}, \quad b = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}}$$

3. Liczby Nivena, to takie liczby naturalne, które dzielą się przez sumę swoich cyfr. Na przykład, liczbami Nivena są 42, 45, 171, 552 (i wiele innych). Podaj najmniejszą liczbę Nivena o sumie cyfr 11.

4. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną różną od 5, która przy dzieleniu przez 24 i 21 daje tę samą resztę równą 5.

5. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio podstaw AB i CD. Punkt P należy do odcinka MN. Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

6. Ile dzielników naturalnych ma liczba $5^3 \cdot 6^4$?

7. Matylda narysowała dwa okręgi: jeden o promieniu $3cm$, a drugi o promieniu cztery razy większym, oraz odcinek AB łączący środki tych okręgów o długości $25cm$. Następnie narysowała wspólną styczną do obu tych okręgów, która przecięła odcinek AB. Oblicz długość odcinka stycznej zawartego między punktami styczności.

8. Czy istnieje taka liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 a przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2?

9. Pokaż, że jeśli od kwadratu dowolnej liczby dwucyfrowej n odejmujemy kwadrat liczby powstałej z przestawienia cyfr liczby n, to otrzymana liczba będzie podzielna przez 99, a także przez sumę cyfr liczby n.

10. Ważąca tonę ruda żelaza zawiera pewną ilość tego metalu. Po usunięciu 100 kg zanieczyszczeń, zawierających średnio 2% żelaza, procent żelaza w pozostałej masie wzrósł o 5 punktów procentowych. Ile kilogramów żelaza jest w pozostałej masie?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła gimnazjalna

1/8 FINAŁU – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy $x = 2,1(102)$. Wtedy $1000x = 2110,2(102)$, czyli $1000x - x = 2110,2(102) - 2,1(102)$, co daje $999x = 2108,1$. W takim razie

$$x = \frac{2108,1}{999} = \frac{21081}{9990} = \frac{7027}{3330}.$$

Ponieważ liczba 3330 rozkłada się na czynniki pierwsze w następujący sposób: $3330 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 37$, a licznik nie dzieli się przez żaden z tych czynników, to otrzymany ułamek jest już nieskracalny.

2. Ta z liczb będzie **większa**, której mianownik drugiego składnika będzie **mniejszy**. Musimy zatem porównać liczby $c = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{6}}$ i $d = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}$. Z nich ta jest **mniejsza**, której mianownik drugiego składnika jest **większy**, czyli musimy porównać liczby $e = 3 + \frac{1}{6}$ i $f = 3 + \frac{1}{6+\frac{1}{2}}$. Ponieważ zaś $6 < 6 + \frac{1}{2}$, to $e > f$, zatem $c < d$ i ostatecznie $a > b$.

3. Szukamy zatem liczby, która jest zarówno podzielna przez 11 jak i ma sumę cyfr równą 11. Liczba jednocyfrowa nie może mieć sumy cyfr 11, zaś liczby dwucyfrowe podzielne przez 11 to 11, 22, ..., 99 i każda z nich ma parzystą sumę cyfr. Widzimy więc, że szukana liczba musi mieć co najmniej trzy cyfry. Zapiszmy liczbę trzycyfrową w postaci xyz, gdzie x, y, z to kolejne cyfry tej liczby. Sprawdźmy, czy x może być równe 1. Najmniejszą liczbą trzycyfrową podzielną przez 11 jest 110, ale ona nie ma sumy cyfr równej 11. Jeśli liczba $1yz$ większa od 110 jest podzielna przez 11, to także liczba $1yz - 110$ jest podzielna przez 11 i w dodatku jest dwucyfrowa, czyli musi być to 11, 22,...,88. Jednak wtedy $y = z + 1$ i znów wychodzi na to, że suma cyfr liczby $1yz$ jest parzysta. Zatem x nie może być równe 1. Sprawdźmy, czy x może być równe 2. Najmniejszą taką liczbą trzycyfrową podzielną przez 11 jest 209 i liczba ta ma sumę cyfr równą 11. Czyli szukaną liczbą jest 209.

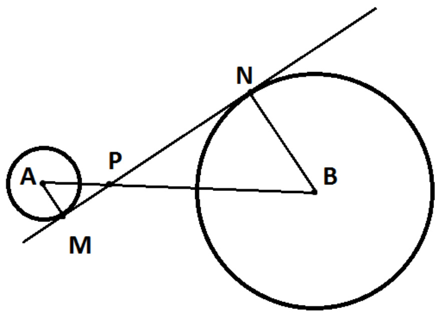
4. Oznaczmy szukaną liczbę przez n. Wtedy $n - 5$ jest różne od 0 i podzielne zarówno przez 24 jak i przez 21, czyli musi być podzielne przez $NWW(24, 21) = 168$. Najmniejszą taką liczbą jest 168, a z równości $n - 5 = 168$ wnosimy, że $n = 173$.

5. Trapezy $AMND$ i $MBCN$ mają równe pola, bo mają podstawy tych samych długości oraz taką samą wysokość. Zauważmy też, że pole trójkąta AMP jest równe polu trójkąta MBP (podstawy tej samej długości i ta sama wysokość). Podobnie, pola trójkątów DPN i PCN są sobie równe. W takim razie

$$P_{APD} = P_{AMND} - P_{AMP} - P_{DPN} = P_{MBCN} - P_{MBP} - P_{PCN} = P_{BCP}.$$

6. Rozpiszmy daną liczbę na iloczyn czynników pierwszych: $5^3 \cdot 6^4 = 5^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4$. Widzimy teraz, że liczba ta ma $(3+1)(4+1)(4+1) = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ dzielników.

7. Wprowadzając oznaczenia jak na rysunku poniżej, widzimy, że trójkąty prostokątne AMP i BNP są podobne w skali $1 : 4$. W takim razie AP jest jedną piątą odcinka AB, czyli ma $5cm$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkata AMP otrzymujemy zatem $MP = 4cm$, co daje $PN = 4 \cdot 4 = 16cm$. Ostatecznie, $MN = 20cm$.



8. Taka liczba nie istnieje. Z pierwszego warunku wynika bowiem, że taka liczba dawałaby resztę 1 przy dzieleniu przez 3, a z drugiego warunku wynika, że przy dzieleniu przez 3 dawałaby resztę 2.

9. Oznaczmy przez x cyfrę dziesiątek, a przez y cyfrę jedności liczby n. Wtedy $n = 10x + y$, a po przestawieniu cyfr otrzymujemy liczbę $10y + x$. Mamy więc

$$(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 - 100y^2 - 20xy - x^2 = 99x^2 - 99y^2.$$

Ponieważ zaś $99x^2 - 99y^2 = 99(x + y)(x - y)$, to widzimy, że liczba ta dzieli się zarówno przez 99 jak i przez $x + y$, czyli sumę cyfr liczby n.

10. Oznaczając przez p procentową zawartość żelaza w początkowej rudzie, warunki zadania możemy opisać równaniem

$$\frac{p}{100} \cdot 1000 - \frac{2}{100} \cdot 100 = \frac{p+5}{100} \cdot 900,$$

co daje $p = 47$. W takim razie w pozostałej masie jest $\frac{47+5}{100} \cdot 900 = 468$ kilogramów żelaza.