POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. W pierwszej szklance było 200 ml soku, a w drugiej 200 ml wody. Najpierw z pierwszej szklanki przelano do drugiej 30 ml soku, a po wymieszaniu zawartości drugiej szklanki, przelano z drugiej do pierwszej 50 ml mieszaniny. Na koniec z pierwszej szklanki przelano (po uprzednim wymieszaniu) 20 ml zawartości. Która z proporcji jest większa: wody do soku w pierwszej szklance, czy soku do wody w drugiej?

2. W trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5 wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa boki zawierają się w przyprostokątnych, a jeden z wierzchołków leży na przeciwprostokątnej. Jaka jest długość boku kwadratu ?

3. Z klocków o wymiarach $1\ cm \times 1\ cm \times 1\ cm$ zbudowano kanciastą szklankę o kwadratowym dnie oraz o grubościach dna i ścian wynoszących 1 cm. Jaka jest pojemność szklanki, jeżeli zużyto 105 klocków, a wysokość jest mniejsza od podwojonej szerokości ?

4. Wykaż, że w dowolnym trójkącie suma długości najdłuższego boku oraz podwojonej długości wysokości opuszczonej na ten bok jest większa niż suma długości pozostałych dwóch boków.

5. W turnieju tenisa każdych dwóch zawodników rozgrywa ze sobą co najwyżej jeden mecz. Uzasadnij, że w każdym momencie rozgrywek znajdzie się dwóch zawodników takich, którzy rozegrali taką samą liczbę meczów.

6. Znajdź pierwszą i ostatnią cyfrę liczby $10^{100} + 5^{50} - 3^{50}$.

7. Na gospodarstwo Bartka spadł deszcz. 50% wody deszczowej spłynęło do pobliskiej rzeczki. Z pozostałej deszczówki: jedna trzecia wsiąkła w glebę, 25% znalazło się w basenie Bartka, piąta część pozostała na roślinach, a siódmą część Bartek zebrał do beczek. Ile wody deszczowej spadło na gospodarstwo Bartka, jeżeli wiadomo, że wszystkie wymienione ilości wody, liczone w m^3, były liczbami całkowitymi, a pojemność basenu była mniejsza niż 150 m^3?

8. Dla jakiej liczby całkowitej a suma wszystkich liczb naturalnych x spełniających nierówność
$$\frac{3x-6}{3} - \frac{x+4}{2} < a$$
wynosi 28?

9. Znajdź liczby pierwsze p, dla których liczba $p + 36$ jest kwadratem liczby naturalnej.

10. Bartek ma przed sobą trzy torby pełne cukierków (w każdej jest ponad 100 sztuk). W pierwszej są toffi, w drugiej irysy, a w trzeciej krówki. Bartek chce skomponować zestaw złożony z dziesięciu cukierków (niekoniecznie różnych). Na ile sposobów może to zrobić?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła gimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Wystarczy zauważyć, że po tych wszystkich przelewaniach znowu jest po 200 ml w każdej szklance. Zatem jeśli w pierwszej szklance jest x ml wody, to proporcja wody do soku wynosi $\frac{x}{200-x}$. Co więcej, wtedy w drugiej szklance jest $(200-x)$ ml wody, czyli x ml soku, więc proporcja soku do wody wynosi również $\frac{x}{200-x}$. Ostatecznie, obie proporcje są równe. Warto dodać, że proporcje te będą równe, nawet jeśli pomiędzy przelewaniami nie będziemy mieszać zawartości szklanki.

2. Po wycięciu kwadratu z trójkąta dostajemy dwa trójkąty podobne. Z równości stosunków przyprostokątnych mamy $\frac{4-x}{x} = \frac{x}{3-x}$, gdzie x jest długością boku kwadratu. Stąd $x = \frac{12}{7}$.

3. Jeżeli szerokość szklanki wynosi n, to zużyto $n^2 + 4(n-1)(w-1) = 105$ klocków, gdzie w oznacza wysokość szklanki. Wynika z tego, że n jest liczbą nieparzystą większą niż 1 i $n^2 < 105$, czyli może przyjąć jedynie wartości $3, 5, 7, 9$. Dla $n = 3$ mamy $w = 13 > 6 = 2n$, a dla $n = 7$ i $n = 9$ liczba w nie jest całkowita. Sprawdzamy bezpośrednio, że dla $n = 5$ mamy $w = 6$, co spełnia warunki zadania. Pojemność szklanki wynosi zatem $(n-2)^2(w-1) = 45$ cm^3.

4. Oznaczmy najdłuższy bok trójkąta ABC przez AB. Wtedy wysokość AD zawiera się w trójkącie ABC, w szczególności, spodek wysokości D należy do odcinka AB. Z nierówności trójkąta dla trójkąta ADC otrzymujemy $AD + DC > AC$, a dla trójkąta DBC otrzymujemy $CD + DB > CB$. Dodając stronami uzyskane nierówności i korzystając z faktu, że $AD + DB = AB$ mamy $AB + 2CD > AC + CB$, co należało pokazać.

5. Niech A oznacza zawodnika, który w danym momencie rozegrał najwięcej meczów, a n - liczbę meczów rozegranych przez A. Liczba meczów, które rozegrał dowolny z n zawodników grających z A, mieści się między 1 i n, zatem albo dla dwóch z nich te liczby są równe (czyli zachodzi teza zadania) albo wszystkie są różne, ale wtedy jedną z tych liczb jest n, co oznacza, że jeden z tych zawodników rozegrał tyle samo meczów co A (zatem i w tym przypadku zachodzi teza).

6. Liczba $5^{50} - 3^{50}$ jest dodatnia i mniejsza niż 5^{50}, zatem także mniejsza niż 10^{50}, co oznacza, że ma mniej niż 51 cyfr. Liczba 10^{100} ma 101 cyfr (jedynkę i sto zer), więc widzimy, że pierwszą cyfrą rozważanej liczby jest 1. Jej ostatnią cyfrę znajdziemy, jeśli znajdziemy ostatnie cyfry wszystkich trzech składników. 10^{100} ma na końcu 0, 5^{50} ma na końcu 5 (bo jest podzielna przez 5 i nieparzysta), zaś 3^{50} ma na końcu 9 (ostatnie cyfry kolejnych potęg trójki tworzą ciąg okresowy: $3, 9, 7, 1, 3, 9, ...$ o powtarzającej się sekwencji $3, 9, 7, 1$). W takim razie, na końcu rozważanej liczby jest cyfra 6.

7. Oznaczając liczbę metrów sześciennych deszczówki, która spadła na gospodarstwo Bartka przez x wiemy, że $\frac{1}{2}x$ spłynęła do rzeczki, $\frac{1}{6}x$ wsiąkła w glebę, $\frac{1}{8}x$ znalazła się w basenie, $\frac{1}{10}x$ pozostała na roślinach, a $\frac{1}{14}x$ została zebrana do beczek. Aby wszystkie te liczby były całkowite, x musi być wielokrotnością 840. Dodatkowo, wiemy, że $\frac{1}{8}x \leqslant 150$, co oznacza, że $x \leqslant 1200$. Ostatecznie, $x = 840$.

8. Po uproszczeniu nierówność przyjmuje postać $x < 2a + 8$, zatem jej rozwiązaniem będą liczby naturalne od 1 (lub od 0 - co nie wpływa na wartość sumy) aż do $2a + 7$ włącznie. Obliczając sumy kolejnych liczb naturalnych widzimy, że $1 + 2 + ... + 7 = 28$, zatem $2a + 7 = 7$, co daje $a = 0$.

9. Niech dla pewnej liczby pierwszej p zachodzi $p + 36 = n^2$. Wtedy $p = n^2 - 6^2 = (n - 6)(n + 6)$. Ponieważ liczba p jest pierwsza, to $n - 6 = 1$, co daje $n = 7$. Musi być więc $p = 7^2 - 6^2 = 13$. Ostatecznie, jedyną taką liczbą jest 13.

10. Policzmy na ile sposobów Bartek może skomponować zestaw, w którym będzie 0 cukierków toffi. Ponieważ do zestawu może wziąć od 0 do 10 irysów (ilość cukierków krówka jest wtedy wyznaczona jednoznacznie), to mamy 11 możliwych zestawów. Analogicznie, liczba możliwych zestawów zawierających 1 toffi jest równa 10 (bo możemy wziąć od 0 do 9 irysów). Kolejno, dla dwóch toffi mamy 9 możliwości, dla trzech mamy 8 możliwości i tak dalej, aż dla 10 toffi mamy już tylko jedną możliwość: 0 irysów i 0 krówek. Po zsumowaniu otrzymujemy:
$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66.$$