POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Ile razy w ciągu doby (od północy do północy) wskazówki zegara tworzą kąt $180°$?

2. Maszyna produkuje tonę cementu w ciągu sześciu godzin. Zakupiono nową maszynę, która potrafi wykonać tę pracę w ciągu trzech godzin. W jakim czasie można wyprodukować tonę cementu, jeżeli pracują obie maszyny jednocześnie ?

3. W grupie pięciu osób, które spotkały się na Potyczkach Matematycznych, niektóre się znają, a inne nie. Okazało się, że każda z osób ma w tej grupie albo 2 albo 3 znajomych. Co więcej, jest tak, że gdy któreś dwie z tych osób są znajomymi, to jedna ma dwoje a druga troje znajomych w tej grupie. Ala ma w tej grupie 3 znajomych. Czarek i Darek znają Bartka. Piąta z osób ma na imię Eryka. Które osoby zna Eryka?

4. Ile wspólnych dzielników mają liczby 525 i 350?

5. W liczbie trzycyfrowej skreślono cyfrę dziesiątek, która była nieparzysta i niepodzielna przez 3. Otrzymano liczbę dwucyfrową 9 razy mniejszą od wyjściowej. Podaj tę liczbę trzycyfrową.

6. Trzy z czterech odcinków, na które dzielą się dwie przecinajace się cięciwy, mają długości 6 cm, 8 cm i 9 cm. Jaką długość może mieć czwarty z odcinków?

7. Pokaż, że jeżeli w trójkącie środkowa pokrywa się z wysokością, to trójkąt ten jest równoramienny.

8. Dane są trzy różne cyfry, z których żadna nie jest zerem. Pokaż, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych (o różnych cyfrach), jakie można zapisać przy użyciu tych cyfr, jest podzielna przez 22.

9. O liczbach dodatnich a, b, c, d i e wiadomo, że $ab = 12$, $bc = 16$, $cd = 24$, $de = 9$. Ile wynosi $\frac{a}{e}$?

10. Wewnątrz trapezu $ABCD$ wybrano punkt M taki, że suma jego odległości od wszystkich wierzchołków trapezu jest najmniejsza z możliwych. Podaj położenie punktu M.

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. O godzinie 0.00 obie wskazówki startują razem, ale wskazówka minutowa ucieka wskazówce godzinowej z prędkością $5,5^\circ$ na minutę. Po 24 godzinach wyprzedzi ją o $24 \cdot 60 \cdot 5.5$ stopni. Dzieląc tę liczbę przez 180 otrzymujemy 44, czyli wskazówka minutowa wyprzedzi wskazówkę godzinową o 44 kątów półpełnych. W takim razie będą one tworzyły kąt 180° dokładnie 22 razy.

2. Wydajność starej maszyny wynosi 1/6 tony na godzinę, a nowej wynosi 1/3 tony na godzinę. Gdy pracują razem to ich wydajność jest równa $1/6 + 1/3 = 1/2$ tony na godzinę. Oznacza to, że potrzebują dwie godziny na wyprodukowanie jednej tony cementu.

3. Bartek nie może znać Ali, bo wtedy miałby troje znajomych - tak samo, jak Ala. Zatem Ala zna Czarka, Darka i Erykę. Stąd wnioskujemy, że Czarek, Darek i Eryka muszą mieć po dwoje znajomych. Skoro Czarek zna Bartka i Alę, to już nie może znać Eryki, tak samo Darek. W takim razie Eryka zna Alę i Bartka.

4. Ponieważ $NWD(525, 350) = 175 = 5^2 \cdot 7^1$, to wspólnych dzielników jest $3 \cdot 2 = 6$ (są to 1, 5, 7, 25, 35, 175).

5. Niech liczbą tą będzie $100x+10y+z$, wtedy $100x+10y+z = 9(10x+z)$, zatem $10x+10y = 8z$. Wynika stąd, że $z = 5$, więc $x + y = 4$. Z warunków zadania mamy $y = 1$. Szukaną liczbą jest 315.

6. Jak wiadomo, jeśli pierwsza cięciwa podzieliła się na odcinki o długościach a i b, a druga na odcinki o długościach c i d, to $ab = cd$. Przypuśćmy, że szukamy d. Należy zatem rozważyć trzy przypadki w zależności od tego, które dwie z podanych długości to a i b. Może być zatem $6 \cdot 8 = 9 \cdot d$ lub $6 \cdot 9 = 8 \cdot d$ lub $9 \cdot 8 = 6 \cdot d$. Ostatecznie, $d = 16/3$ lub $d = 27/4$ lub $d = 12$.

7. Niech AH będzie wysokością i środkową w trójkącie ABC. Wtedy $AB^2 = AH^2 + BH^2 = AH^2 + CH^2 = AC^2$, co daje $AB = AC$.

8. Oznaczmy te cyfry przez x, y i z. Wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach to: $10x+y$, $10x+z$, $10y+x$, $10y+z$, $10z+x$ i $10z+y$. Suma tych liczb wynosi $22(x+y+z)$, czyli jest podzielna przez 22.

9. Mamy:
$$\frac{a}{e} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot b \cdot c \cdot d} = \frac{ab \cdot cd}{bc \cdot de} = \frac{12 \cdot 24}{16 \cdot 9} = 2.$$

10. Punkt M to punkt przecięcia się przekątnych trapezu. Rzeczywiście, aby suma odległości punktu M od wierzchołków A i C była najmniejsza musi on leżeć na przekątnej AC - wtedy owa suma jest równa długości przekątnej AC. Podobnie, aby suma odległości od B i D była najmniejsza, musi on leżeć na przekątnej BD. Wynika stąd, że suma odległości od wszystkich czterech wieszchołków będzie najmniejsza, gdy punkt M będzie leżał jednocześnie na jednej, jak i drugiej przekątnej.