POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Pierwsze koło zębate ma 64, a drugie 24 zęby. Pierwsze z tych kół napędza drugie. Po ilu obrotach pierwszego koła ponownie spotkają się te same zęby obydwu kół?

2. W gminie jest 8 wiosek (w tym siedziba gminy). Władze gminy chcą zbudować w gminie drogi – przy czym drogą nazywamy połączenie dwóch wiosek, nie przechodzące przez żadną inną. Ile (co najmniej) dróg należy zbudować by z każdej wioski można było dotrzeć do siedziby gminy przejeżdżając przez co najwyżej jedną wioskę i by listonosz mógł objechać wszystkie wioski (wyjeżdżając z siedziby gminy i wracając do niej) nie zajeżdżając do każdej więcej niż raz?

3. Z 4900 kostek sześciennych o krawędzi długości 1 cm zbudowano model graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Zewnętrzne ściany otrzymanego modelu pomalowano, po czym rozłożono na pojedyncze kostki. Okazało się, że kostek, w których co najmniej jedna ścianka jest pomalowana jest dokładnie tyle ile tych, w których żadna ze ścianek nie jest pomalowana. Jakie wymiary miał graniastosłup?

4. Różnica między czwartymi potęgami pewnych dwóch liczb naturalnych wynosi 34481, zaś pomiędzy ich drugimi potęgami 41. Jakie to liczby?

5. W pewnym czworokącie $ABCD$ o polu 10 cm^2 zaznaczono środki boków: środek boku AB oznaczono literą E, zaś środek boku CD literą F. Pole czworokąta $AEFD$ wynosi 5 cm^2. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

6. Czy liczba
$$179^{100} + 177^{100}$$
jest podzielna przez 5?

7. Przez jaką liczbę całkowitą należy podzielić 87912, by otrzymać liczbę pięciocyfrową zapisaną przy pomocy tych samych cyfr, tzn. cyfr 8, 7, 9, 1 i 2?

8. Trzej koledzy mają jeden motocykl, na którym jednocześnie mogą jechać co najwyżej dwie osoby. Motocykl jedzie z prędkością 40 km/h, zaś każdy z kolegów może maszerować z prędkością 5 km/h. Czy w ciągu trzech godzin wszyscy trzej mogą dotrzeć do celu odległego o 50 km?

9. W sześciokącie wypukłym wszystkie boki mają długość 1, a co drugi kąt jest prosty. Oblicz pole tego sześciokąta.

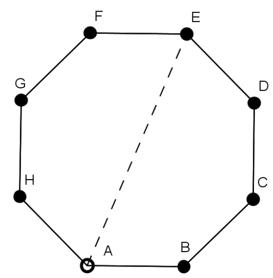
10. Suma 3 kolejnych liczb pierwszych jest parzysta. Jakie to liczby?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Chcemy by po pewnej liczbie obrotów pierwszego koła również drugie koło wykonało całkowitą liczbę obrotów. Tzn. gdy wykonamy $64x$ przeskoków, to liczba tych przeskoków powinna być podzielna przez 24. Szukamy więc takich liczb naturalnych x, y, że
$$64x = 24y,$$
przy czym chcemy by x było jak najmniejsze. Równanie jest równoważne równaniu
$$8x = 3y,$$
którego najmniejszym rozwiązaniem jest $x = 3$ (wtedy $y = 8$). Odpowiedź: po 3 obrotach.

2. Jeśli listonosz ma mieć możliwość objechania wszystkich wiosek powinna istnieć trasa łącząca je wszystkie w pewnym cyklu. Oznacza to konieczność wybudowania 8 dróg. Drogi te poazane są na rysunku (siedziba gminy oznaczona jest literą A). Jednak w tej sytuacji do siedziby gminy nie można dostać się z każdego miejsca przejeżdżając przez co najwyżej jedną wioskę.



Ale wystarczy dobudować jedną drogę (łączącą siedzibę gminy z wioską leżącą w narysowanym cyklu najdalej od niej – tzn. tą, do której z siedziby gminy dojechać trzeba przez trzy inne wioski – na ryzunku oznaczona linią przerywaną) by i ten drugi warunek był spełniony. Potrzeba więc 9 dróg.

3. Graniastosłup prawidłowy czworokątny to po prostu prostopadłościan o podstawie kwadratu. Jeśli wymiary ścian (w kostkach) oznaczymy jako a, a oraz b, to $a^2 \cdot b = 4900$. Z drugiej strony, kostek, dla których żadna ścianka nie jest pomalowana jest $4900/2 = 2450 = (a-2)^2(b-2)$

Mamy więc:
$$a^2 \cdot b = 7 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$
oraz
$$(a-2)^2 \cdot (b-2) = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5^2$$
Oznacza to, że krawędź podstawy wewnętrznego graniastosłupa $a-2$ jest równa jednej z liczb: 1, 5, 7 lub 35. Jednocześnie krawędź ta musi być o dwa krótsza od krawędzi większego graniastosłupa, a to jest możliwe tylko gdy $a = 7$. Mamy więc do czynienia z graniastosłupem o wymiarach $7 \times 7 \times 100$.

4. Napiszmy układ równań
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 34\,481 \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$
Ponieważ $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$, to widzimy, że $x^2 + y^2 = 841$. Uwzględniając $x^2 - y^2 = 41$ mamy $x^2 = 441$ czyli $x = 21$, oraz $y^2 = 400$, więc $y = 20$.

5. Zauważmy, że czworokąty $AEFD$ oraz $EBCF$ mają to samo pole równe 5 cm^2. Trójkąty AEF oraz BEF mają te same pola (ponieważ mają wspólną wysokość opuszczoną na prostą AB oraz podstawy tej samej długości). W związku z tym można zauwazyc, że również trójkąty FAD oraz FBC muszą mieć te same pola. A to oznacza, że wysokości tych trójkątów opuszczone na prostą CD są tej samej długości. Stąd odcinki AB oraz DC są równoległe, a to oznacza, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

6. Popatrzmy na ostatnie cyfry kolejnych potęg liczb 179 oraz 177 – zależą one oczywiście tylko od ostatnich cyfr podstaw tych potęg. Parzyste potęgi liczby 179 kończą się cyfrą 1, zaś nieparzyste cyfrą 9. Jeśli popatrzymy na ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 177, to kończą się one kolejno cyframi 7, 9, 3, 1, 7 itd. Stąd ostatnią cyfrą liczby 177^{100} jest 1. W związku z tym ostatnia cyfra liczby

$$179^{100} + 177^{100}$$

jest równa $1 + 1 = 2$. A taka liczba nie jest podzielna przez 5.

7. Dzieląc liczbę 87912 przez najmniejszą liczbę pięciocyfrową, czyli przez 10000 otrzymujemy $8,7912$, zatem poszukiwana liczba musi być mniejsza od $8,7912$. Pozostaje więc sprawdzić jedynie liczby od 1 do 8, przy czym od razu widzimy, że liczba 87912 nie dzieli się przez 5, a po podzieleniu przez 2 ma na końcu 6. Sprawdzając pozostałe przypadki otrzymujemy, że należy podzielić tę liczbę albo przez 1 albo przez 4 (dostaniemy wtedy 21978).

8. Na pewno nie uda się po prostu dwa razy obrócić – raz z jednym, raz z drugim pasażerem. Wymaga to przejechania 150 km czyli prawie 4 godzin jazdy. Natomiast jeśli przez 3 godziny cały czas ktoś będzie szedł to można w tym czasie zaoszczędzić 15 km (a może i więcej) drogi motocykla. Można zaproponować np. taki harmonogram: najpierw wyrusza motocykl z dwoma kolegami, a trzeci rusza w tym czasie piechotą. Motocykl jedzie godzinę, pokonuje 40 km i wysadza pasażera - resztę drogi pokona on piechotą i dotrze na miejsce po 3 godzinach. Motocykl zawraca i wraca do idącego kolegi, który po godzinie jest w odległości 5 km od punktu startowego. Do pokonania jest więc 35 kilometrów – ze względną prędkością 45 km/h – czyli motocykl i pieszy spotkają się po $\frac{35}{45} = \frac{7}{9}$ godziny. Spotkają się w punkcie odległym od startu o

$$5 + \frac{7}{9} \cdot 5 = 8 + \frac{8}{9} \text{ km.}$$

Do pokonania zostaje $41 + \frac{1}{9}$ km. Z prędkością 40 km/h potrzebne jest na to

$$\frac{41 + \frac{1}{9}}{40} = 37/36 \text{ h.}$$

A do dyspozycji mamy jeszcze $\frac{11}{9} = \frac{44}{36}$ h, co oznacza, że spokojnie zdążą na czas.

9. Narysujmy sześciokąt $ABCDEF$ i załóżmy, że kąty proste są przy wierzchołkach B, D, F. Trójkąt EDC jest prostokątny i równoramienny (podobnie trójkąty EFA oraz ABC). Możemy więc policzyć długości każdej z przekątnych EC, AC oraz AE: wynosi ona $\sqrt{2}$. Trójkąt ACE jest równoboczny – możemy więc policzyć jego pole. Podobnie jak pole każdego ze wspomnianych trójkątów EDC, oraz EFA i ABC. Daje to pole: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

10. Nie mogą to być trzy liczby nieparzyste – wówczas ich suma byłaby nieparzysta. Jedną z tych liczb musi więc być 2. Dwie kolejne to 3 oraz 5.