POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Na ile sposobów można wypłacić kwotę 35 złotych przy pomocy dokładnie 30 monet – mając do dyspozycji monety o nominałach 1 zł, 2 zł oraz 5 zł (każdą z nich w dowolnej ilości).

2. Stop miedzi, cyny i ołowiu waży 100 kg. Cyna w stopie stanowi 36% miedzi oraz 56,25% ołowiu. Jaka jest waga ołowiu w stopie?

3. Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 11?

4. Pokaż, że jeżeli w trójkącie dwusieczna kąta pokrywa się z wysokością, to trójkąt ten jest równoramienny.

5. Ile parzystych dzielników naturalnych ma liczba 2016?

6. Na okręgu o promieniu 6 znajdują się punkty A i B odległe o 6. Jakie jest największe możliwe pole trójkąta ABC, jeżeli wierzchołek C także leży na tym okręgu ?

7. Liczby 113 i 311 są lustrzane, gdyż jedna powstaje poprzez zapisanie cyfr drugiej w odwrotnej kolejności. I obie są pierwsze. Wyszukujemy wszystkie pary lustrzanych liczb pierwszych wśród liczb dwucyfrowych i dla każdej pary obliczamy jej dodatnią różnicę. Jaki największy wynik dostaniemy?

8. Uzasadnij, że środkowe trójkąta dzielą go na 6 części o równych polach.

9. Z liczby trzycyfrowej utworzono nową zamieniając miejscami cyfrę setek z cyfrą jedności. Uzasadnij, że różnica nowej i starej liczby jest podzielna przez 9 oraz przez 11.

10. Dobrze znający się Antek, Bartek, Czesiek, Darek i Edek składali zeznania. Wiadomo, że każdy z nich zawsze kłamie lub zawsze mówi prawdę. Oto ich zeznania :

    Antek: Bartek kłamie.

    Bartek: Czesiek mówi prawdę.

    Czesiek: Darek kłamie.

    Darek: Antek mówi prawdę.

    Edek: Co najmniej jeden z nich mówi prawdę.

    Ilu wśród nich jest kłamców?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że jeśli wykorzystamy dwie monety 5 złotowe i pozostałe weźmiemy nawet o jak najmniejszym nominale to przekroczymy 35 zł:

   $$2 \cdot 5 + 28 \cdot 1 = 38 > 35.$$

   Podobnie gdybyśmy wzięli więcej niż 2 monety pięciozłotowe.

   Możemy więc wziąć jedną monetę o nominale 5 zł, lub nie wziąć żadnej takiej monety. W pierwszym przypadku musimy przedstawić 30 zł. przy pomocy 29 monet - a to możemy zrobić na jeden sposób – biorąc 28 monet o nominale 1 zł i jedną o nominale 2 zł. W drugim przypadku musimy 35 zł wyrazić przy pomocy 30 monet jedno- i dwuzłotowych. Tu też mamy tylko jedną możliwość: jeśli wszystkie monety będą miały nominał 1 zł, to uzyskamy tylko 30 zł. Jeśli będziemy je – jedną po drugiej – zamieniać na dwuzłotowe, to po zamianie 5 monet uzyskamy 35 zł. Zamiana innej liczby monet da nam mniej lub więcej niż 35.

   Podsumowując: mamy dwa rozwiązania.

2. Niech x będzie wagą ołowiu w kg. Wtedy $x + 0,5625x + \frac{100}{36} \cdot 0,5625x = 100$. Ponieważ $0,5625 = \frac{9}{16}$, to $x = 32$.

3. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 11 jest $1001 = 91 \cdot 11$, zaś największą jest $9999 = 909 \cdot 11$, zatem liczb tych jest $909 - 91 + 1 = 819$.

4. Niech AH będzie wysokością i dwusieczną w trójkącie ABC. Wtedy trójkąty prostokątne ABH i ACH są przystające, ponieważ mają takie same kąty przy wspólnym boku AH (cecha KBK).

5. Ponieważ $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$, zatem parzystych dzielników jest $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

6. Niech H będzie środkiem cięciwy AB. Pole trójkąta będzie największe, gdy punkt C umieścimy maksymalnie daleko od prostej zawierajacej odcinek AB, czyli w połowie dłuższego łuku łączącego A i B. Wtedy HC będzie wysokością trójkąta ABC. Ponieważ trójkąt AOB, gdzie O jest środkiem okręgu, jest równoboczny, to $HC = HO + OC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB + 6 = 3\sqrt{3} + 6$.

7. Pary dwucyfrowych liczb pierwszych lustrzanych względem siebie to 97 i 79, 73 i 37, 71 i 17 oraz 31 i 13. Zatem największa różnica między takimi dwucyfrowymi liczbami lustrzanymi wynosi $71 - 17 = 54$.

8. Każda taka trójkątna część ma podstawę 2 razy mniejszą od odpowiedniego boku rozważanego trójkąta, a wysokość 3 razy mniejszą od odpowiedniej wysokości tego trójkąta (ponieważ środkowe dzielą się w stosunku 1:2). Zatem pole każdej części wynosi $\frac{1}{6}$ pola trójkąta.

9. Oznaczmy kolejne cyfry rozważanej liczby przez a, b, c. Wtedy liczba ta wynosi $100a + 10b + c$, a nowa liczba wynosi $100c + 10b + a$. Ich różnica jest równa $99(a - c) = 9 \cdot 11(a - c)$.

10. Jeśli Antek kłamie, to Bartek i Czesiek mówią prawdę, a Darek kłamie. Jeśli Antek mówi prawdę, sytuacja jest "odwrotna". Oczywiście Edek mówi prawdę. Zatem kłamców jest dwóch.