POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

FINAŁ

1. Dla liczby naturalnej n symbolem $n!$ (czyt. "n silnia") oznaczamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie. Dla jakiej najmniejszej liczby naturalnej n liczba $n!$ dzieli się przez 1001?

2. Na stole ułożono cztery kulki o promieniu 1 cm tak, że ich środki tworzą wierzchołki kwadratu i każda z nich jest styczna do dwóch innych. Na nie ułożono piątą taką samą kulkę, stycznie do nich. Ile wynosi wysokość tak utworzonej "piramidy"?

3. O pewnych liczbach całkowitych n, k wiemy, że $n(n+1) = 2k(k+1)$. Pokaż, że liczba $nk(n+1)(k+1)$ jest podzielna przez 3.

4. Adam i Jacek wybrali się jednym rowerem z Pcimia do Kcimia trasą widokową o długości 30 km. Wyruszyli razem o 9 rano: Adam na rowerze, Jacek pieszo. Po 10 minutach Adam zostawił rower na trasie i poszedł dalej pieszo. Gdy Jacek dotarł do roweru, pojechał na nim 10 minut, następnie zostawił go na trasie i pomaszerował dalej. Tak postępując równocześnie dotarli do celu i choć minęło już południe, to podróż zajęła im mniej niż 3,5 godziny. Każdy z nich maszerował z taką samą prędkością, a na rowerze jechał trzy razy szybciej. Z jaką prędkością jechali oni rowerem?

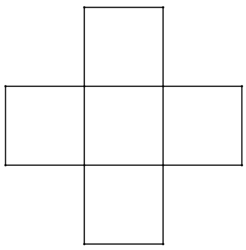
5. Oblicz pole figury (na płaszczyźnie) złożonej z dwóch kół o promieniach 1 i 2 takich, że średnica mniejszego koła jest cięciwą większego.

6. Litery A i B należy zastąpić różnymi cyframi (każdą z liter zawsze tą samą cyfrą), tak by powstało poprawne działanie. Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & A \\
 & & B & B & B & B \\
 & & B & B & B & B \\
 & & B & B & B & B \\
 & + & B & B & B & B \\
\hline
= & A & B & B & B & B
\end{array}$$

7. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniające równanie $x^2 = 2017 + 144y^2$.

8. Z pięciu jednakowych kwadratów o boku długości 2 ułożono krzyż (przedstawiony na rysunku obok). Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tego krzyża wokół prostej zawierającej przekątną środkowego kwadratu.



9. O liczbach rzeczywistych x, y, z wiemy, że $x + y + z = 2$ oraz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Oblicz $x^2 + y^2 + z^2$.

10. Liczbę naturalną nazwiemy antypierwszą, jeżeli posiada ona więcej dzielników niż każda mniejsza od niej liczba naturalna. Pokaż, że liczb antypierwszych jest nieskończenie wiele.

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjalny

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, to najmniejszą liczbą n spełniającą warunek zadania jest 13.

2. Rozważmy dwie niestyczne "dolne" kule i "górną" o środkach odpowiednio: O_1, O_3, O_5. Środki te są wierzchołkami trójkąta o bokach długości 2 cm, 2 cm oraz $2\sqrt{2}$ cm. Wysokość piramidy jest równa wysokości trójkąta $O_1O_3O_5$ opuszczonej z wierzchołka O_5, powiększonej o dwa promienie kulek. Zatem wynosi $\sqrt{2} + 2$ cm.

3. Załóżmy, że liczby $n, k, n+1, k+1$ nie są podzielne przez 3. Oznacza to, że $n = 3p+1,\ k = 3q + 1$ dla pewnych liczb całkowitych p, q. Zatem $(3p + 1)(3p + 2) = 2(3q + 1)(3q + 2)$, skąd $9p^2 + 9p + 2 = 18q^2 + 18q + 4$. Oznacza to, że $3(3p^2 + 3p) = 3(6q^2 + 6q) + 2$, co nie jest możliwe, gdyż lewa strona jest podzielna przez 3, a prawa strona nie.

4. Niech d oznacza liczbę kilometrów, jaką każdy z nich przechodził w czasie 10 minut. W ciągu pierwszych 10 minut Adam przebył odległość $3d$ (na rowerze), a Jacek odległość d (pieszo). W ciągu następnych 10 minut Adam przebył odległość d (pieszo) i Jacek też d (pieszo). W ciągu kolejnych 10 minut Adam przebył d i Jacek też d (i właśnie dotarł do roweru). W ciągu dalszych 10 minut Adam przebył odległość d (pieszo), a Jacek odległość $3d$ (na rowerze). Oznacza to, że po 40 minutach obaj przebyli dystans $6d$. Widać stąd, że Adam i Jacek spotykali się co 40 minut, a skoro na koniec przybyli do Kcimia w tym samym czasie, to podróż trwała całkowitą wielokrotność 40 minut (pomiędzy 3 i 3,5 godziny), zatem podróż zajęła im 200 min. W tym czasie przebyli dystans $5 \cdot 6d = 30$ km, zatem $d = 1$ km. Zatem maszerowali z prędkością 1 km na 10 minut, czyli 6 km/h. Prędkość na rowerze wynosiła więc 18 km/h.

5. Oznaczmy środek większego koła przez O, zaś średnicę mniejszego koła, która jest zarazem cięciwą większego przez AB. Zauważmy, że trójkąt ABO jest trójkątem równobocznym o boku długości 2. Zatem pole figury jest równe sumie: $\frac{5}{6}$ pola większego koła, pola trójkąta ABO oraz pola połowy mniejszego koła. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy wynik: $\frac{23}{6}\pi + \sqrt{3}$.

6. Oznaczając liczbę $BBBB$ przez x otrzymujemy warunek $A + 4x = 10000A + x$, czyli $x = 3333A$. Wystarczy zatem sprawdzić dla jakiej cyfry A liczba x jest czterocyfrowa i jest zapisana czterema identycznymi cyframi. Rozpatrując 9 możliwości na cyfrę A otrzymujemy trzy rozwiązania: $A = 1$, $B = 3$ lub $A = 2$, $B = 6$ lub $A = 3$, $B = 9$.

7. Przekształcając dane równanie mamy $(x + 12y)(x - 12y) = 2017$. Ponieważ 2017 jest liczbą pierwszą, to otrzymujemy jedynie cztery możliwości: $x + 12y = 2017,\ x - 12y = 1$ lub $x + 12y = 1,\ x - 12y = 2017$ lub $x + 12y = -2017,\ x - 12y = -1$ i na koniec $x + 12y = -1,\ x - 12y = -2017$. Rozwiązując powyższe układy równań dostajemy cztery pary: $x = 1009,\ y = 84,\ x = 1009,\ y = -84,\ x = -1009,\ y = -84$ oraz $x = -1009,\ y = 84$.

8. Płaszczyzna przechodząca przez drugą przekątną środkowego kwadratu i prostopadła do osi obrotu tnie otrzymaną bryłę na dwie symetryczne części. Oznaczmy jedną z nich przez B. Zauważmy, że jeśli B "uzupełnimy" trzema stożkami o promieniu podstawy $\sqrt{2}$ oraz wysokości $\sqrt{2}$, to otrzymamy dwa stożki o promieniu podstawy $2\sqrt{2}$ oraz wysokości $2\sqrt{2}$ zlepione podstawami. W takim razie objętość bryły B wynosi
$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi(2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{26}{3}\pi\sqrt{2}.$$
Stąd objętość całej bryły jest równa $\frac{52}{3}\pi\sqrt{2}$.

9. Z drugiej równości – po pomnożeniu obu stron przez xyz – widzimy, że $xy + yz + zx = 0$, zatem $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 4$.

10. Gdyby liczb antypierwszych było skończenie wiele, to istniałaby wśród nich największa. Oznaczmy ją przez n. Mamy teraz, że każda liczba $k > n$ nie jest antypierwsza, zatem ma co najwyżej tyle dzielników co n. Jednak liczba $2n > n$ posiada więcej dzielników. Sprzeczność dowodzi tezy.