POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ – DOGRYWKA

1. Liczba a ma 6 dzielników, a liczba b ma 4 dzielniki. Ile dzielników może mieć liczba ab?
2. Prostokąt o wymiarach 100×101 podzielono prostymi na kwadraty o boku 1. Na ile części proste te podzieliły przekątną tego prostokąta?
3. Czy istnieje 2016-kąt wypukły, w którym każdy kąt ma miarę wyrażającą się całkowitą liczbą stopni?
4. Z czterech różnych liczb naturalnych utworzono wszystkie możliwe sumy po dwie liczby i uzyskano następujące wyniki: 13, 14, 17, 21, 24 oraz 25. Jakie to były liczby?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjalny
PÓŁFINAŁ – DOGRYWKA – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Liczba, która ma 4 dzielniki może być postaci p^3 albo pq dla pewnych liczb pierwszych p i q. Podobnie liczba, która ma 6 dzielników może być postaci r^5 albo r^2s dla pewnych liczb pierwszych r i s. Zależnie od równości między liczbami p, q a liczbami r, s iloczyn takich liczb może być postaci: p^3r^5, p^8, p^3r^2s, p^5s, p^4r^2, pqr^5, p^6q, pqr^2s, p^3qs, p^2qr^2, p^3q^2. Ma wtedy odpowiednio: $24, 9, 24, 12, 15, 24, 14, 24, 16, 18, 12$ dzielników. Porządkując odpowiedź: Iloczyn liczb o 4 i o 6 dzielnikach może mieć $9, 12, 14, 15, 16, 18$ albo 24 dzielniki.

2. Wprowadzając układ współrzędnych możemy założyć , że $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(100, 101)$, $(0, 101)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Proste dzielące go na kwadraty to: $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = 99$ oraz $y = 1$, $y = 2$, $\ldots$, $y = 100$. Zauważmy, że każda z tych prostych ma dokładnie jeden punkt wspólny z przekątną. Ponieważ przekątna ma równanie $y = \frac{101}{100}x$, to przecięcie żadnej pary z tych prostych (pionowej i poziomej) nie leży na przekątnej. Oznacza to, że przekątna została podzielona $99 + 100$ punktami, czyli na 200 części.

3. Nie istnieje. Każdy kąt takiego wypukłego 2016-kąta musiałby mieć co najwyżej $179°$, czyli suma miar kątów wynosiłaby nie więcej niż $2016 \cdot 179$ stopni. Podczas gdy suma miar kątów 2016-kąta musi wynosić $2014 \cdot 180$ stopni. Ponieważ

$$2014 \cdot 180 = 2014 \cdot 179 + 2014 > 2014 \cdot 179 + 2 \cdot 179 = 2016 \cdot 179,$$

więc to niemożliwe.

4. Poszukiwane liczby możemy ustawić w kolejności od najmniejszej do największej. Jeśli oznaczymy je kolejnymi literami możemy napisać $a < b < c < d$. Zauważmy, że dwie największe liczby dają w sumie 25 ($c + d = 25$), zaś dwie najmniejsze dają w sumie 13 ($a + b = 13$). Wynik 24 musi być sumą liczby największej i drugiej w kolejności (czyli liczb b i d). W ten sposób możemy zauważyć, że liczba trzecia w kolejności musi być o 1 większa od drugiej (czyli $c = b + 1$).

   Zauważmy, że nie możemy od razu rozstrzygnąć, która z liczb $a + d$ czy $b + c$ jest większa. Może się więc zdarzyć, że $b + c = 21$. Ponieważ jest to suma dwóch kolejnych liczb naturalnych to musi być $b = 10$, $c = 11$, co od razu daje $a = 3$ oraz $d = 14$.

   Ale może się również zdarzyć, że $b + c = 17$. Wówczas $b = 8$, $c = 9$. Daje to $a = 5$, zaś $d = 16$.