POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Czy liczba $\sqrt{44,444\ldots} - \sqrt{0,444\ldots}$ jest wymierna?

2. Wiek Adama, Basi i Jacka, podany w latach, wyraża się liczbą całkowitą. Jacek ma 3 razy tyle lat, ile miała Basia, kiedy Adam był w wieku Jacka. Jacek jest starszy od Basi o połowę wieku Adama. Liczba lat Adama dzieli się przez 4, a wiek Jacka nie dzieli się ani przez 12 ani przez 27. Ponadto Adam nie jest jeszcze w wieku emerytalnym. W jakim wieku są wymienione osoby?

3. Michaś miał okrutne hobby: codziennie wpadał do biblioteki i na półce "Literatura podróżnicza" zmieniał miejscami książki – ale zawsze tak, że spośród wszystkich 40 książek znajdujących się na tej półce dokładnie 2 pozostawały na miejscu. Pani bibliotekarka codziennie, po wyjściu Michasia, pracowicie ustawiała książki we właściwej kolejności. Michaś zaś dbał o to, by każdego dnia został na miejscu inny zestaw dwóch książek. Po ilu dniach Michaś nie będzie mógł już kontynuować swej nieludzkiej zabawy?

4. Symetralna przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 6$, $b = 8$ odcina z tego trójkąta czworokąt. Oblicz średnicę okręgu opisanego na tym czworokącie.

5. W Małej Sumce jest tylko jedna szkoła podstawowa i każda klasa liczy tam mniej niż 40 uczniów. W klasie 1a dziewczęta stanowią 60% uczniów tej klasy i wszystkie przyszły dziś do szkoły na czas. Jednak część chłopców zaspała i dlatego na pierwszej godzinie obecnych było jedynie 90% uczniów. Ilu uczniów liczy 1a, jeśli wiadomo, że dokładnie jedna trzecia chłopców z tej klasy będzie miała na koniec roku szóstkę z matematyki?

6. Jakie jest pole figury ograniczonej przez trzy styczne zewnętrznie okręgi o promieniach $1,\ 1,\ \sqrt{2}-1$?

7. Oblicz (bez użycia kalkulatora) $2345 \cdot 567856785678 - 5678 \cdot 234523452345$.

8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

9. Dane są dwie liczby naturalne a i b. Wiadomo, że żadna z tych liczb – ani ich różnica – nie jest podzielna przez 3. Czy iloczyn tych liczb może być kwadratem liczby naturalnej?

10. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $xy - 6 = 2x - 3y - 5$.

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Tak. Mamy bowiem

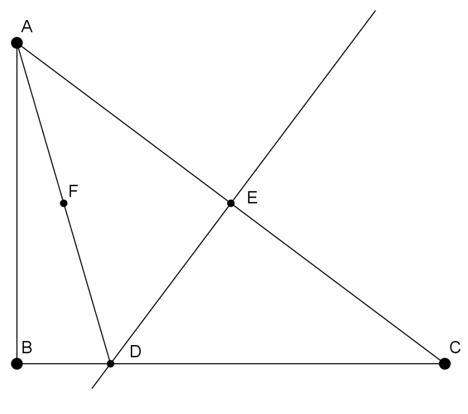
$$\sqrt{44,444\ldots} - \sqrt{0,444\ldots} = \sqrt{\frac{400}{9}} - \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

2. Jeżeli wiek tych osób oznaczymy pierwszymi literami ich imion, to otrzymamy $J = 3(B - (A - J))$, $J - B = A/2$. Drugie z tych równań możemy zapisać $2J = 2B + A$, a po dodaniu jego do pierwszego równania otrzymamy $5B = 2A$. Ponieważ A dzieli się przez 4, to B dzieli się przez 8, czyli $B = 8k$ dla pewnej liczby naturalnej k. Z równań mamy $A = 20k$, $J = 18k$. Ponieważ Adam nie jest w wieku emerytalnym, to $A < 100$, zatem $k < 5$. Jeżeli $k \in \{2, 3, 4\}$, to liczba J jest podzielna przez 12 lub 27, więc pozostaje rozważyć przypadek $k = 1$. Wtedy Basia ma 8 lat, Jacek 18 lat, a Adam 20 lat i - co można łatwo sprawdzić - wszystkie warunki zadania są spełnione.

3. Pytanie można sformułować tak: na ile różnych sposobów mogę wybrać 2 książki spośród 40? Najprościej chyba policzyć to tak: dla każdej z 40 książek można dobrać drugą na 39 sposobów – mamy więc $40 \cdot 39$ par. Jednak w ten sposób każdą z par liczymy dwukrotnie: raz jako (A, B), a drugi raz jako (B, A). Wszystkich wyborów jest więc $40 \cdot 39/2 = 780$.

   Można policzyć to również w inny sposób: będziemy wybierać książki od lewej do prawej. Pierwszą książkę mogę wybrać na 39 sposobów (bo muszę mieć możliwość wyboru jeszcze jednej stojącej na prawo od niej). Jeśli wybrałem książkę stojąca na pozycji 1, to drugą mogę wybrać na jeden z 39 sposobów, jeśli początkowo wybrałem książkę stojącą na pozycji 2, to kolejną mogę wybrać na 38 sposobów itd. Ogólnie, jeśli początkowo wybrałem książkę stojąca na pozycji n (gdzie n jest jedną z liczb naturalnych od 1 do 39), to w drugim kroku mogę wybrać jedną z $40 - n$ możliwości. Wszystkich sposobów jest więc $39 + 38 + ... + 2 + 1 = (39 + 1) + (38 + 2) + ... + (21 + 19) + 20 = 19 \cdot 40 + 20 = 780$.

4. Popatrzmy na rysunek



   Zauważmy, że zarówno kąt ABD jak i AED są kątami prostymi. A to oznacza, że odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkątach ABD oraz AED – odcinek ten jest więc również średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABDE$. Chcemy policzyć długość odcinka AD. Widać, że trójkąty AED oraz EDC są przystające z cechy BKB, co oznacza, że $AD = DC = 8 - BD$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABD otrzymujemy:

$$AB^2 + BD^2 = AD^2,$$

co daje równość
$$6^2 + BD^2 = (8 - BD)^2$$
i oznacza, że $BD = \frac{7}{4}$ oraz $AD = DC = 8 - \frac{7}{4} = 6,25$.

5. Zauważmy, że 10% liczby uczniów w klasie jest liczbą całkowitą (bo tylu chłopców zaspało). Zważywszy na warunki zadania klasa 1a musi liczyć 10, 20 lub 30 uczniów. Chłopców byłoby wówczas odpowiednio 4, 8 lub 12. Tylko ta ostatnia wartość jest podzielna przez 3, w klasie musi więc być 30 uczniów.

6. Środki okręgów są wierzchołkami trójkąta o bokach równych sumie odpowiednich promieni okręgów, stąd długości tych boków wynoszą $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2. Zatem trójkąt ten jest prostokątny równoramienny. Pole rozważanej figury jest polem tego trójkąta (równym 1) pomniejszonym o pola trzech wycinków koła: dwóch o promieniu 1 i kącie 45^o oraz jednego o promieniu $\sqrt{2} - 1$ i kącie 90^o. Zatem szukane pole wynosi $1 - 2 \cdot \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = 1 - \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

7. Zauważmy, że $567856785678 = 5678 \cdot 100010001$ oraz $234523452345 = 2345 \cdot 100010001$. Oznacza to, że

$$2345 \cdot 567856785678 - 5678 \cdot 234523452345 = 2345 \cdot 5678 \cdot 100010001 - 5678 \cdot 2345 \cdot 100010001 = 0.$$

8. Zauważmy, że $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Zauważmy, że $n - 1, n, n + 1$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi. Jeśli założymy, że żadna z nich nie jest podzielna przez 5, to podzielna przez 5 musi być liczba $n - 2$ albo $n - 3$, co oznacza że możemy zapisać $n = 5k + 2$ lub $n = 5k + 3$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k. Wtedy mamy
$$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$$
lub
$$n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)$$
co oznacza, że w obu tych przypadkach liczba $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5. W związku z tym, niezależnie od wartości n, jedna z liczb $n - 1$, n, $n + 1$, $n^2 + 1$ musi być podzielna przez 5.

9. Nie może. Z warunków zadania wynika bowiem, że żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 3 oraz że liczby te dają różną resztę z dzielenia przez 3. W takim razie jedna z nich musi dawać resztę 1, a druga musi dawać resztę 2. Zatem ich iloczyn przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, podczas gdy kwadraty liczb naturalnych przy dzieleniu przez 3 dają tylko resztę 0 lub 1.

10. Równanie to możemy równoważnie zapisać $(x + 3)(y - 2) = -5$, zatem $x + 3 = 1$ i $y - 2 = -5$ lub $x + 3 = -1$ i $y - 2 = 5$ lub $x + 3 = 5$ i $y - 2 = -1$ lub $x + 3 = -5$ i $y - 2 = 1$, skąd otrzymujemy rozwiązania $(-2, -3), (-4, 7), (2, 1), (-8, 3)$.