

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Czy istnieją takie liczby całkowite a , b , że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą, a liczba $a^4 + b^4$ jest podzielna przez 3?
2. Pokaż, że suma kwadratów odległości środka ciężkości trójkąta prostokątnego od jego wierzchołków równa jest $\frac{2}{3}$ kwadratu przeciwprostokątnej. (Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia się jego środkowych.)
3. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x^y = 2^x$.
4. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x , y , z zachodzi nierówność
$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \geq 6xyz.$$
5. Pokaż, że dla dowolnego naturalnego n liczba $n^3 + 25n + 500$ nie jest podzielna przez 625.
6. Wierzchołki sześcianu pomalowano na zielono, niebiesko lub różowo. Pokaż, że przynajmniej jeden z warunków jest spełniony :
 - a) pewna krawędź ma końce jednego koloru.
 - b) istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach jednego koloru.
7. Dany jest trójkąt ABC a bokach a , b i c . Niech A_1 i A_2 będą punktami przecięcia prostej BC oraz prostych przechodzących przez A i prostopadłych do dwusiecznych kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C . Analogicznie określamy punkty B_1, B_2 oraz C_1, C_2 . Pokaż, że z odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 można zbudować trójkąt i oblicz jego pole.
8. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych $AC = a$, $BC = b$ zbudowano kwadraty $ADEB, BFGC, ACHI$. Oblicz pole wielokąta $DEFGHI$.
9. Czworoscian $TXYZ$ ma znaną objętość V i wszystkie krawędzie równej długości. Punkty A, B, C i D są środkami ciężkości ścian czworoscianu $TXYZ$. Jaka jest objętość czworoscianu $ABCD$?
10. Czy liczba $\sqrt{12 + \sqrt{108}} - \sqrt{4 + \sqrt{12}}$ jest wymierna ?