POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Czy istnieją takie liczby całkowite $a,\ b$, że a^2+b^2 jest liczbą pierwszą, a liczba a^4+b^4 jest podzielna przez 3?

2. Pokaż, że suma kwadratów odległości środka ciężkości trójkąta prostokątnego od jego wierzchołków równa jest $\frac{2}{3}$ kwadratu przeciwprostokątnej. (Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia się jego środkowych.)

3. Rozwiąż w liczbach naturalych równanie $x^y = 2^x$.

4. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $x,\ y,\ z$ zachodzi nierówność
$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geqslant 6xyz.$$

5. Pokaż, że dla dowolnego naturalnego n liczba $n^3+25n+500$ nie jest podzielna przez 625.

6. Wierzchołki sześcianu pomalowano na zielono, niebiesko lub różowo. Pokaż, że przynajmniej jeden z warunków jest spełniony :
a) pewna krawędź ma końce jednego koloru.
b) istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach jednego koloru.

7. Dany jest trójkąt ABC a bokach a, b i c. Niech A_1 i A_2 będą punktami przecięcia prostej BC oraz prostych przechodzących przez przez A i prostopadłych do dwusiecznych kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C. Analogicznie określamy punkty B_1, B_2 oraz C_1, C_2. Pokaż, że z odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 można zbudować trójkąt i oblicz jego pole.

8. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych $AC=a,\ BC=b$ zbudowano kwadraty $ADEB, BFGC, ACHI$. Oblicz pole wielokąta $DEFGHI$.

9. Czworościan $TXYZ$ ma znaną objętość V i wszystkie krawędzie równej długości. Punkty A, B, C i D są środkami ciężkości ścian czworościanu $TXYZ$. Jaka jest objętość czworościanu $ABCD$?

10. Czy liczba $\sqrt{12+\sqrt{108}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}$ jest wymierna ?

UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Nie ma takich liczb. x^2 i x^4 mają równe reszty z dzielenia przez 3, zatem jeśli a^4+b^4 jest podzielne przez 3, to a^2+b^2 również. Wiemy jednak, że a^2+b^2 jest liczbą pierwszą, stąd $a^2+b^2=3$, co nie jest możliwe.

2. Rozważmy układ współrzędnych wyznaczony przez przyprostokątne taki, że wierzchołki trójkąta są punktami $(0,0)$, $(a,0)$ i $(0,b)$. Środek ciężkości trójkąta jest punktem $(a/3,b/3)$, zatem suma kwadratów odległości tego punktu od wierzchołków trójkąta wyraża się wzorem:
$$\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}-b\right)^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2),$$
co daje tezę z twierdzenia Pitagorasa.

3. Ponieważ obie strony równania są liczbami naturalnymi, to $x=2^t$ dla pewnej liczby naturalnej t. Zatem $ty=2^t$, skąd $t=2^s$. Ostatecznie $x=2^{2^s}$, $y=2^{2^s-s}$, $s=0,1,\ldots$

4. Nierówność równoważnie możemy zapisać $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geqslant 6$, czyli $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 6$. Ponieważ $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ dla $a>0$, otrzymujemy tezę.

5. Załóżmy, że liczba ta jest podzielna przez 625 dla pewnego n, wtedy $n=5k$, dla pewnej liczby naturalnej k. Oznacza to, że liczba k^3+k+4 jest podzielna przez 5. Rozważając reszty z dzielenia przez 5 otrzymujemy sprzeczność.

6. Załóżmy, że warunki a), b) nie są spełnione. Będziemy mówić, że punkt jest N, Z lub R, jeżeli jest koloru odpowiednio niebieskiego, zielonego lub różowego. Oznaczmy przez A ustalony wierzchołek, np. niebieski, a przez B,C,D wierzchołki połączone z nim krawędziami. Wierzchołki B,C,D nie mogą być N i nie mogą być jednego koloru, zatem dwa z nich są jednego koloru, np. B i C są Z, a D jest R. Niech E będzie wierzchołkiem połączonym krawędziami z B i D (innym niż A), a F połączony z C i D (innym niż A). Wierzchołki E i F nie mogą być R ani Z, zatem są N. Punkty E, F i A są N i tworzą trójkąt równoboczny. Sprzeczność dowodzi tezy.

7. Nietrudno pokazać, że długość każdego z rozważanych odcinków jest równa obwodowi trójkąta ABC, zatem zbudowany z nich trójkąt będzie trójkątem równobocznym o boku $a+b+c$. Szukane pole wynosi zatem $\frac{1}{4}(a+b+c)^2\sqrt{3}$.

8. Oczywiście, pola trójkątów ABC i CGH są równe $\frac{1}{2}ab$. Jedyny problem, to pola trójkątów AID i BEF. Oznaczmy przez α kąt BAC, wtedy pole trójkąta AID jest równe $\frac{1}{2}AI\cdot AD\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}ab$. Analogicznie pokazujemy, że pole trójkąta BEF wynosi $\frac{1}{2}ab$. Dodając obliczone pola trójkątów oraz pola kwadratów i wykorzystując równość $AB^2=a^2+b^2$ otrzymujemy, że pole wielokąta wynosi $2a^2+2b^2+2ab$.

9. Niech A będzie środkiem ciężkości ściany XYT, zaś B - środkiem ciężkości ściany YZT. Środek ciężkości ściany czworościanu leży w 2/3 jego wysokości (licząc od wierzchołka). Zatem krawędź AB jest równoległa do linii łączącej środki krawędzi XY i YZ czworościanu $TXYZ$ i ma długość 2/3 tej linii, która z kolei jest dwukrotnie krótsza od krawędzi XZ. Czworościan $ABCD$ ma zatem 3 razy krótsze krawędzie niż czworościan $TXYZ$, a stąd jego objętość wynosi $V/27$.

10. Tak, gdyż rozważana liczba jest równa

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}\left(\sqrt{3}-1\right)=2.$$