POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Liczby x i y są ujemne oraz suma ich odwrotności jest równa połowie ich sumy. Znajdź iloczyn tych liczb.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB = CD$. Pokaż, że przekątne dzielą się w stosunku $BC : AD$.

3. Rozstrzygnij, czy liczba
$$2016^{2014} + 2016^{2015} + 2016^{2016} + 2016^{2017}$$
jest podzielna przez 2017.

4. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ obrano dowolnie punkt M. Pokaż, że istnieje czworokąt wypukły, którego przekątne są prostopadłe i mają długości AB i BC, a boki mają długości AM, BM, CM, DM.

5. Przekątne trapezu podzieliły go na cztery trójkąty, z których trzy mają pola 3, 6 i 12. Podaj, ile wynosi pole czwartego trójkąta.

6. Wielomian stopnia 3 o współczynnikach niewymiernych posiada dwa pierwiastki niewymierne. Czy trzeci pierwiastek też musi być niewymierny ?

7. Czy istnieje wielościan wypukły, który ma dwa razy więcej krawędzi niż wierzchołków ?

8. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $1/n + 1/k + 1/\ell = 1$.

9. Znajdź funkcję kwadratową, która dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia zależność
$$f(2x - 1) = 8x^2 - 14x.$$

10. Oblicz największy wspólny dzielnik liczb 12345678^9 oraz 10^{2016}.

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy
$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{2}.$$
Skoro liczby x i y są ujemne, to $x+y \neq 0$, a więc $xy = 2$.

2. Zauważmy, że kąty: ACB, CAD, CBD i ADB są oparte na łukach o takiej samej długości (bo $AB = CD$), zatem wszystkie są równe. Wynika stąd, że trójkąty BCE i ADE, gdzie E jest punktem przecięcia przekątnych, są podobne. A to tak naprawdę należało w tym zadaniu wykazać.

3. TAK. Wystarczy bowiem zauważyć, że
$$2016^{2014} + 2016^{2015} + 2016^{2016} + 2016^{2017} = 2016^{2014}(1 + 2016 + 2016^2 + 2016^3) =$$
$$= 2016^{2014}(1 + 2016)(1 + 2016^2) = 2016^{2014} \cdot 2017 \cdot (1 + 2016^2)$$

4. Rozważmy punkt M' leżący na prostej równoległej do AB i przechodzącej przez punkt M taki, że odcinek MM' ma długość AB i przecina odcinek BC. Czworokąt $MBM'C$ spełnia warunki zadania.

5. Oznaczmy dłuższą podstawę trapezu przez a, zaś krótszą przez b. Niech P_1 oznacza pole trójkąta przy podstawie b, P_2 - pole trójkąta przy podstawie a oraz P_3 - pole każdego z dwóch trójkątów przy ramionach trapezu (w trapezie dwa trójkąty przylegające do ramion mają równe pola). Zatem pola, o których mowa w zadaniu, to P_1, P_2, P_3 i P_3. Czwarte pole musi zatem mieć wartość 3, 6 lub 12. Ponadto wiemy, że
$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_2}{P_3},$$
gdyż to wynika z własności przekątnych w dowolnym czworokącie wypukłym. Ostatnia równość daje, że $P_3^2 = P_1 \cdot P_2$, tzn. P_3 jest średnią geometryczną P_1 i P_2. W takim razie musi być $P_3 = 6$.

6. NIE, np. $\sqrt{2}(x^2 - 2)(x - 1)$.

7. TAK, np. ośmiościan foremny.

8. Niech $n \leqslant k \leqslant \ell$. Oczywiście, nie może być $n \geqslant 4$. Co więcej, jeżeli $n = 3$, to $k = \ell = 3$. Niech teraz $n = 2$. Wtedy $k = 3$ i $\ell = 6$ lub $k = \ell = 4$. Dla $n = 1$ nie ma rozwiązań.

9. Ta funkcja to $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$. Można na przykład wstawić $x = (t+1)/2$ i otrzymać:
$$f(t) = 8\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+1}{2}\right) = 2t^2 - 3t - 5.$$

10. Ponieważ $10^{2016} = 2^{2016} \cdot 5^{2016}$, a $12345678^9 = 2^9 \cdot 6172839^9$, to szukanym dzielnikiem jest 2^9, bo 6172839 jest nieparzysta i niepodzielna przez 5.