POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których spełnione jest równanie
$$(x^2+1)(y^2+1)=(x+y)^2$$
2. Punkt P leży wewnątrz sześcianu o krawędzi długości 1. Ile wynosi minimalna suma kwadratów odległości punktu P od wszystkich ścian sześcianu?
3. Ile liczb naturalnych od 1 do 2017 (włącznie) jest nieparzystych i nie dzieli się przez 5?
4. Czy liczba 1317 może być różnicą kwadratów dwóch liczb naturalnych?
5. Czy do liczby 2016^2 możemy dodać pewną liczbę trzycyfrową, tak by otrzymać kwadrat liczby naturalnej?
6. O której godzinie wskazówki zegara tworzą po raz pierwszy w ciągu doby kąt $250°$? Przyjmujemy, że doba zaczyna się o północy.
7. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 15, zaś promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 3. Ile wynosi obwód tego trójkąta?
8. Dowolne trzy wierzchołki trapezu równoramiennego (niebędącego równoległobokiem) wyznaczają trójkąt równoramienny. Ile wynoszą miary kątów tego trapezu?
9. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ jest ciągiem arytmetycznym i zawiera dwie liczby wymierne. Czy wynika stąd, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami wymiernymi?
10. Jaś ma 17 karteczek z różnymi liczbami całkowitymi. Raz ustawił je w kolejności i oznaczył $a_1, a_2, \ldots a_{17}$, a potem pomieszał i oznaczył od nowa $b_1, b_2, \ldots b_{17}$. Jaś chciałby uzyskać w ten sposób nieparzysty iloczyn $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot\ldots\cdot(a_{17}-b_{17})$. Czy jest to możliwe?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła ponadgimnazjalna

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Po uproszczeniu widzimy, że $x^2y^2 - 2xy + 1 = 0$, czyli $(xy-1)^2 = 0$. A to oznacza, że $xy = 1$. Jedyne wartości całkowite, które to spełniają to $x = y = 1$ oraz $x = y = -1$.

2. Zauważmy, że jeśli punkt P jest oddalony od którejś ze ścian o x (oczywiście musi być wtedy $x \in [0,1]$), to od przeciwległej ściany jest oddalony o $1-x$. Zatem suma kwadratów odległości punktu P od tych dwóch ścian jest równa $x^2 + (1-x)^2$. Wyrażenie to w rozpatrywanym przedziale przyjmuje najmniejszą wartość, gdy $x = \frac{1}{2}$, tzn. gdy punkt P znajduje się dokładnie w połowie odległości pomiędzy ścianami. Tak samo jest dla każdej pary ścian przeciwległych, więc uzyskamy najmniejszą sumę kwadratów, gdy P będzie środkiem sześcianu. Wtedy suma ta wyniesie $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

3. Wszystkich liczb nieparzystych w podanym zakresie jest 1009. Tych nieparzystych i podzielnych przez 5 jest 202. W związku z tym liczb nieparzystych, które nie dzielą się przez 5 jest $1009 - 202 = 807$.

4. TAK. Mamy bowiem $1317 = 659^2 - 658^2$.

5. Zauważmy, że kolejny kwadrat liczby naturalnej $2017^2 = (2016+1)^2 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 > 2016^2 + 1000$, czyli po dodaniu do 2016^2 liczby trzycyfrowej nie uzyskamy kwadratu liczby naturalnej.

6. Zauważmy, że dojdzie do tego wtedy, gdy wskazówka duża oddali się od małej o kąt $110°$. Wiadomo, że jeśli duża wskazówka pokonała w pewnym czasie kąt ϕ, to mała pokonała kąt $\frac{\phi}{12}$. Piszemy równanie
$$\phi - \frac{\phi}{12} = 110°,$$
którego rozwiązaniem jest $\phi = 120°$, co oznacza, że dłuższa wskazówka pokonała kąt $120°$ i w tym momencie mamy godzinę 00:20.

7. Jeśli drugą z przyprostokątnych oznaczymy jako x, zaś przeciwprostokątną jako y, to możemy odczytać związek: $x - 3 + 12 = y$. Po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa dochodzimy do równania
$$x^2 + 15^2 = (x+9)^2.$$
Jedynym jego rozwiązaniem jest $x = 8$, a to oznacza, że $y = 17$ i obwód trójkąta jest równy 40.

8. Oznaczmy trapez $ABCD$, przy czym boki AB oraz CD są równoległe. Jedna z podstaw musi być dłuższa – załóżmy, że jest to podstawa AB. Wówczas kąt przy wierzchołku D jest rozwarty, więc skoro trójkąt ACD jest równoramienny, to musi być $AD = DC$. Możemy zatem zapisać równości kątów:
$$\measuredangle CAB = \measuredangle ACD = \measuredangle CDB = \measuredangle DBA = \measuredangle CAD = \alpha$$
A to oznacza, że kąty przy podstawie AB mają miarę 2α, zaś przy podstawie CD miarę 3α. Stąd $\alpha = 36°$ i kąty w trapezie mają miarę $72°$ oraz $108°$.

9. Tak. Przypuśćmy, że dla pewnych $k < n$ wyrazy a_k oraz a_n są liczbami wymiernymi. Oznaczmy przez r różnicę tego ciągu. Zauważmy, że $a_n - a_k = (n-k)r$, co oznacza, że r jest liczbą wymierną. Wtedy również $a_1 = a_n - (n-1)r$ jest liczbą wymierną. Oznacza to automatycznie, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami wymiernymi.

10. Nie jest możliwe, niezależnie od tego, jakie liczby są na karteczkach Jasia. Aby iloczyn był nieparzysty, to liczba b_i musi być innej parzystości niż liczba a_i. To oznaczałoby, że na karteczkach Jasia jest tyle samo liczb parzystych wśród $a_1, \ldots, a_{17}$, co nieparzystych wśród $b_1, \ldots, b_{17}$. To jest niemożliwe, gdyż jest nieparzysta liczba karteczek.

    Uwaga. Za rozwiązanie, które przyjmuje konkretne liczby wpisane na karteczkach należy przyznać maksymalnie 5 punktów.