POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Kąt przy wierzchołku C trójkąta ABC jest prosty. Ponadto $CA = CB = 1$. Na boku BC obrano punkt X, na boku AC punkt Y, a na boku AB punkt Z, przy czym $CX = 2XB$, $AY = \frac{1}{2}YC$ oraz $AZ = \frac{1}{3}ZB$. Oblicz pole trójkąta XYZ.

2. Pokaż, że pole czworokąta $ABCD$ nie jest większe od $\frac{1}{2}(AB \cdot BC + AD \cdot DC)$.

3. Dla jakich całkowitych n liczba $\frac{3n^2-7n+6}{n-3}$ jest całkowita?

4. Czy wielomian stopnia 3 o współczynnikach całkowitych może mieć trzy różne pierwiastki wymierne takie, że żaden z nich nie jest całkowity?

5. Ciąg x_n jest zdefiniowany przez $x_1 = 7$, $x_2 = -5$ oraz $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę pierwszych 2017 wyrazów tego ciągu.

6. Ile kątów ma n-kąt wypukły, jeśli suma jego pewnych $(n-1)$ kątów wynosi $2016°$?

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne rozpoczynające się siódemką, które po zmazaniu tej siódemki maleją 36 razy.

8. Udowodnić, że wśród trzech kolejnych liczb naturalnych, z których środkowa jest sześcianem liczby naturalnej, znajduje się zawsze liczba podzielna przez 7.

9. Dla jakich wartości m z odcinków o długościach $2m+2$, $m+8$, $3m+1$ można zbudować trójkąt równoramienny?

10. Szansa, że będzie padać w sobotę wynosi 40%. Prawdopodobieństwo, że będzie padać w niedzielę, to 30%. Jednak prawdopodobieństwo, że będzie padać w niedzielę jest dwukrotnie większe, gdy w sobotę padało niż wtedy, gdy w sobotę jest bezdeszczowo. Jaka jest szansa, że w te dwa dni deszcz jednak nie spadnie?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy $CX = CY = \frac{2}{3}$ i $BX = \frac{1}{3}$. Wysokości trójkątów AYZ i BXZ opuszczone z wierzchołka Z wynoszą odpowiednio $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Pole trójkąta XYZ jest równe $\frac{1}{2}$ pomniejszone o pola trójkątów AYZ, CXY i BXZ, czyli
$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{9}.$$

2. Oczywiście wystarczy rozważyć czworokąty wypukłe. Pole trójkąta ABC nie przekracza $\frac{1}{2}AB\cdot BC$, gdyż wysokość trójkąta nie jest dłuższa od boku, z którym ma wspólny koniec. Podobnie szacujemy pole trójkąta ADC. Ponieważ suma trójkątów ABC i ADC daje czworokąt $ABCD$, otrzymujemy tezę.

3. Wyrażenie to jest równe $3n + 2 + \frac{12}{n-3}$, więc będzie liczbą całkowitą, gdy $n - 3$ będzie dodatnim lub ujemnym dzielnikiem liczby 12. Mamy więc
$$n - 3 \in \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$
czyli $n \in \{-9, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 15\}$.

4. TAK, np. $(2x - 1)(3x - 1)(4x - 1)$.

5. Zauważamy, że wyrazy ciągu powtarzają się co 6, a suma kolejnych sześciu wynosi 0. Ponieważ 2016 jest podzielne przez 6, to suma pierwszych 2017 wyrazów jest równa x_1, czyli 7.

6. Suma kątów n-kąta wypukłego wynosi $(n-2)\cdot 180°$, a więc suma jego $(n-1)$ kątów mieści się pomiędzy $(n-3)\cdot 180°$ a $(n-2)\cdot 180°$. Ponieważ $11 \cdot 180° = 1980 < 2016 < 12 \cdot 180°$, to n musi wynosić 14.

7. Jeśli naszą liczbę zapiszemy jako $7 \cdot 10^{n+1} + R$, to możemy napisać $7 \cdot 10^{n+1} + R = 36R$, a zatem $R = 2 \cdot 10^n$. Wobec tego wszystkie liczby, o które pyta zadanie, to
$$72, 720, 7200, 72000, \ldots$$

8. Oznaczmy środkową liczbę przez n^3. Jeśli n dzieli się przez 7, to OK. Jeśli n daje przy dzieleniu przez 7 resztę 1, 2 lub 4, to n^3 daje resztę 1 z dzielenia przez 7, a więc $n^3 - 1$ dzieli się przez 7. Jeśli zaś n daje resztę 3, 5 lub 6, to $n^3 + 1$ dzieli się przez 7.

9. Są trzy możliwe równości: $2m+2 = m+8$, czyli $m = 6$, co daje trójkąt o bokach $14; 14; 19$. $2m+2 = 3m+1$, czyli $m = 1$, co jednak nie daje trójkąta, bo $9 > 4+4$ oraz $m+8 = 3m+1$, czyli $m = 7/2$, co daje trójkąt o bokach $9; 11,5; 11,5$.

10. Oznaczmy przez x prawdopodobieństwo, że pada w niedzielę, gdy w sobotę jest sucho. Wtedy mamy $3/5 \cdot x + 2/5 \cdot 2x = 3/10$, skąd $x = 3/14$. Zatem szansa na suchy weekend wynosi $3/5 \cdot (1 - 3/14) = 33/70$.