

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

### FINAŁ

1. Ile jest par  $(x, y)$  liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 2017 takich, że  $x^2 + y^2$  jest podzielne przez 49?
2. Mamy pięć miseczek ponumerowanych od 1 do 5. Wrzucamy piłeczkę do losowo wybranej miseczki, a następnie wyjmujemy i wrzucamy ponownie do miseczki wybranej przypadkowo, ale o numerze większym. Jaka jest szansa, że piłeczka "odwiedzi" miseczkę o numerze 3?
3. Dana jest podstawa  $a$  trójkąta oraz suma  $d > a$  pozostałych boków. Jakie jest największe pole takiego trójkąta?
4. Znajdź zbiór punktów powierzchni sześcianu równoodległych od końców przekątnej.
5. W przestrzeni mamy dwie proste skośne i punkt nie należący do żadnej z nich. Czy istnieje prosta przechodząca przez ten punkt i przecinająca obie proste?
6. Na okręgu rozmieszczono 2017 liczb całkowitych. Znajdź wszystkie takie układy liczb, że każda z nich jest równa sumie sąsiednich.
7. Udowodnij, że dla dodatnich liczb  $a, b$  zachodzi zawsze nierówność

$$2\sqrt{a} + b \geq 3\sqrt[3]{ab}.$$

8. Rozstrzygnij, czy liczby  $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$  i  $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$  mogą być równe dla parami różnych liczb całkowitych  $a, b, c$ .
9. Niech  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną. Ze zbioru liczb  $\{1, 2, \dots, 2n+3\}$  wybieramy trójelementowy podzbiór. Na ile sposobów możemy to zrobić, aby suma kwadratów wybranych liczb była podzielna przez 4?
10. O wielomianie trzeciego stopnia  $f$  wiadomo, że

$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(5)| = |f(6)| = |f(7)| = 3.$$

Oblicz na tej podstawie  $|f(0)|$ .