UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ

1. Ile jest par (x, y) liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 2017 takich, że $x^2 + y^2$ jest podzielne przez 49?

2. Mamy pięć miseczek ponumerowanych od 1 do 5. Wrzucamy piłeczkę do losowo wybranej miseczki, a następnie wyjmujemy i wrzucamy ponownie do miseczki wybranej przypadkowo, ale o numerze większym. Jaka jest szansa, że piłeczka "odwiedzi" miseczkę o numerze 3?

3. Dana jest podstawa a trójkąta oraz suma $d > a$ pozostałych boków. Jakie jest największe pole takiego trójkąta?

4. Znajdź zbiór punktów powierzchni sześcianu równoodległych od końców przekątnej.

5. W przestrzeni mamy dwie proste skośne i punkt nie należący do żadnej z nich. Czy istnieje prosta przechodząca przez ten punkt i przecinająca obie proste?

6. Na okręgu rozmieszczono 2017 liczb całkowitych. Znajdź wszystkie takie układy liczb, że każda z nich jest równa sumie sąsiednich.

7. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a, b zachodzi zawsze nierówność
$$2\sqrt{a} + b \geqslant 3\sqrt[3]{ab}.$$

8. Rozstrzygnij, czy liczby $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ i $\dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ mogą być równe dla parami różnych liczb całkowitych a, b, c.

9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 2n+3\}$ wybieramy trójelementowy podzbiór. Na ile sposobów możemy to zrobić, aby suma kwadratów wybranych liczb była podzielna przez 4?

10. O wielomianie trzeciego stopnia f wiadomo, że
$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(5)| = |f(6)| = |f(7)| = 3.$$
Oblicz na tej podstawie $|f(0)|$.

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Badając reszty z dzielenia przez 7 kwadratu liczby stwierdzamy, że suma kwadratów jest podzielna przez 7, gdy taki jest każdy składnik. Zatem pytanie w treści zadania dotyczy ilości par liczb podzielnych przez 7. Jest ich 288^2.

2. Jeżeli najpierw był numer 1 miseczki (szansa $\frac{1}{5}$), to szansa na 3 jest $\frac{1}{4}$, jeżeli numer 2, to szansa na 3 jest $\frac{1}{3}$. Może też być numer 3 w pierwszym wrzuceniu. Zatem szukana szansa wynosi $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{19}{60}$.

3. I sposób: Oznaczmy przez h wysokość opuszczoną na a, pozostałe boki przez b i $d - b$, zaś rzut b na a przez x. Mamy wtedy $h^2 + x^2 = b^2$, $h^2 + (a - x)^2 = (d - b)^2$. Odejmując stronami te równości otrzymujemy $x = \frac{1}{2a}(2db + a^2 - d^2)$, stąd h^2 daje się przedstawić jako funkcja kwadratowa zmiennej b:

$$h^2 = b^2 - \frac{1}{4a^2}(2db + a^2 - d^2)^2 = \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right) \cdot b^2 - \frac{d(a^2 - d^2)}{a^2} \cdot b - \frac{(a^2 - d^2)^2}{4a^2}.$$

   W takim razie największą wartość h^2 (a zatem także h i pola rozważanego trójkąta) otrzymujemy dla $b = \frac{d}{2}$.

   II sposób. Wierzchołek trójkąta nie będący końcem a, leży na elipsie o odległości ognisk a i większej osi równej d, zatem największą wysokość otrzymamy, gdy wierzchołek ten znajduje się na mniejszej osi, czyli w przypadku trójkąta równoramiennego.

4. Jest to przecięcie powierzchni sześcianu płaszczyzną symetralną przekątnej, czyli sześciokąt foremny.

5. Taka prosta może istnieć, ale nie musi. Jako kontrprzykład rozważmy sześcian o dolnej podstawie $ABCD$ i górnej $EFGH$ (oznaczonych tak, że AE jest krawędzią). Wybierając jako proste: prostą AB oraz skośną względem niej prostą EH, a za punkt – punkt C, to widzimy, że każda prosta przechodząca przez punkt C i przecinająca prostą AB leży w płaszczyźnie dolnej podstawy sześcianu, czyli nie może przecinać prostej EH.

6. Załóżmy, że w układzie sąsiadują P (liczba parzysta) i N (liczba nieparzysta. Wtedy ich sąsiedzi są N. Zatem otrzymamy sekwencję PNN i łatwo zauważyć, że ta sekwencja będzie się powtarzać "bez końca". Wynika z tego, że ilość liczb musi być podzielna przez 3, co nie jest spełnione. Oczywiście nie mogą być tylko liczby N, zatem są tylko P. Jeżeli nie wszystkie liczby są zerowe, to dzieląc je przez 2 otrzymamy układ spełniający regułę, że każda liczba jest sumą sąsiednich. Wykonując dzielenie przez 2, ewentualnie wielokrotnie, otrzymamy liczbę nieparzystą, co prowadzi do sprzeczności. Jedynym układem liczb spełniającym warunki zadania jest układ samych zer.

7. Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczna i geometryczną $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+b}{3} \geqslant \sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}b}$. Można również przyjąć $a = x^6$, $b = y^3$ i po przekształceniach zaobserwować, że $L - P = y(x - y)^2$.

8. Równość tych liczb jest równoważna równości $(c-a)(ab+bc+ca) = 0$, czyli $ab+bc+ca = 0$, zatem $a(b + c) = -bc$, co jest spełnione np. dla $a = 3$, $b = 6$, $c = -2$.

9. Kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, a nieparzystej daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4. Zatem wszystkie liczby muszą być parzyste. Ilość sposobów wynosi $\binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

10. Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej t równanie $f(x) = t$ może mieć co najwyżej trzy rozwiązania. W takim razie, wśród liczb $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ dokładnie trzy są równe 3, a pozostałe trzy są równe -3. Oznacza to, że wykres funkcji f ma trzy punkty wspólne z prostą $y = -3$ oraz trzy punkty wspólne z prostą $y = 3$. Rozważając jak może wyglądać wykres wielomianu trzeciego stopnia, aby zachodziło powyższe, łatwo zauważyć, że wówczas albo $f(2) = f(3) = (7) = 3$ i $f(1) = f(5) = f(6) = -3$ albo odwrotnie. Zatem albo $f(x) - 3 = a(x-2)(x-3)(x-7)$ (i wtedy $f(1) = -3$, co daje $a = \frac{1}{2}$) albo $f(x) + 3 = a(x-2)(x-3)(x-7)$ (i wtedy $f(1) = 3$, co daje $a = -\frac{1}{2}$). W obu przypadkach otrzymujemy $|f(0)| = 18$.