

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

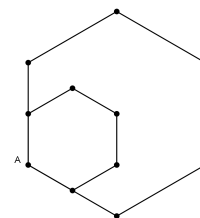
poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Liczba a jest nieparzysta, zaś liczby b , c są parzyste. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) takie, że

$$\frac{a + b - c}{a + c - b} = \frac{a + c}{a + b}.$$

2. Dwa sześciokąty foremne o bokach 1 i 2 mają wspólny wierzchołek A , przy czym mniejszy leży wewnątrz większego jak na rysunku. Mniejszy toczy się bez poślizgu wewnątrz drugiego sześciokąta po jego obwodzie. Oblicz długość drogi, jaką przebędzie wierzchołek A mniejszego sześciokąta zanim pokryje się z innym wierzchołkiem większego sześciokąta.



3. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 12 razy większe od sumy swoich cyfr.
4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkty A_1, B_1, C_1 są punktami przecięcia z okręgiem opisanym na ABC odpowiednio prostych AI, BI, CI , różnymi od A, B, C , natomiast punkty A_2, B_2, C_2 są punktami styczności okręgu wpisanego z bokami BC, CA i AB . Udowodnij, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są podobne.
5. Udowodnij, że jeżeli trójkąt można podzielić na dwa trójkąty podobne, to jest on równoramienny lub prostokątny.
6. Podróżnik przebył 1000 km wzdłuż równika na zachód, następnie skręcił na północ, po pewnym czasie skręcił na wschód i przebył 500 km, po czym skręcił na południe i dotarł do miejsca startu. Jak długa była jego podróż? Przyjmujemy, że wielkie koło Ziemi ma długość 40000 km.
7. Pięciokąt ma wszystkie boki o długości 1 i przynajmniej dwa sąsiednie kąty o mierze 108° . Ile jest takich pięciokątów?
8. W trójkącie o wierzchołku $(0, 3)$ dwie wysokości zawierają się w prostych o równaniach $y = x$ oraz $x + 3y = 3$. Znajdź równania prostych zawierających boki tego trójkąta.
9. W turnieju tenisa każdych dwóch zawodników rozgrywa ze sobą co najwyżej jeden mecz. Czy w każdym momencie rozgrywek znajdzie się dwóch zawodników takich, którzy rozegrali taką samą liczbę meczów?
10. Pierwszy gracz trzyma kartkę z napisami (O, O, R) , drugi (R, O, O) . Rzucamy monetą 100 razy, przy czym gracz wygrywa w sytuacji, gdy trzy kolejne wyniki rzutów będą zgodne z napisem na jego kartce. Jeśli podczas 100 początkowych rzutów nie można rozstrzygnąć, kto jest zwycięzcą, to wygrywa gracz drugi. Który z graczy ma większą szansę na wygraną?