POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

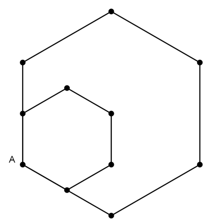
EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Liczba a jest nieparzysta, zaś liczby $b,\ c$ są parzyste. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) takie, że
$$\frac{a+b-c}{a+c-b} = \frac{a+c}{a+b}.$$

2. Dwa sześciokąty foremne o bokach 1 i 2 mają wspólny wierzchołek A, przy czym mniejszy leży wewnątrz większego jak na rysunku. Mniejszy toczy się bez poślizgu wewnątrz drugiego sześciokąta po jego obwodzie. Oblicz długość drogi, jaką przebędzie wierzchołek A mniejszego sześciokąta zanim pokryje się z innym wierzchołkiem większego sześciokąta.



3. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 12 razy większe od sumy swoich cyfr.

4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty A_1, B_1, C_1 są punktami przecięcia z okręgiem opisanym na ABC odpowiednio prostych AI, BI, CI, różnymi od A, B, C, natomiast punkty A_2, B_2, C_2 są punktami styczności okręgu wpisanego z bokami BC, CA i AB. Udowodnij, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są podobne.

5. Udowodnij, że jeżeli trójkąt można podzielić na dwa trójkąty podobne, to jest on równoramienny lub prostokątny.

6. Podróżnik przebył 1000 km wzdłuż równika na zachód, następnie skręcił na północ, po pewnym czasie skręcił na wschód i przebył 500 km, po czym skręcił na południe i dotarł do miejsca startu. Jak długa była jego podróż? Przyjmujemy, że wielkie koło Ziemi ma długość 40000 km.

7. Pięciokąt ma wszystkie boki o długości 1 i przynajmniej dwa sąsiednie kąty o mierze $108°$. Ile jest takich pięciokątów?

8. W trójkącie o wierzchołku $(0,3)$ dwie wysokości zawierają się w prostych o równaniach $y = x$ oraz $x + 3y = 3$. Znajdź równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

9. W turnieju tenisa każdych dwóch zawodników rozgrywa ze sobą co najwyżej jeden mecz. Czy w każdym momencie rozgrywek znajdzie się dwóch zawodników takich, którzy rozegrali taką samą liczbę meczów?

10. Pierwszy gracz trzyma kartkę z napisami (O,O,R), drugi (R,O,O). Rzucamy monetą 100 razy, przy czym gracz wygrywa w sytuacji, gdy trzy kolejne wyniki rzutów będą zgodne z napisem na jego kartce. Jeśli podczas 100 początkowych rzutów nie można rozstrzygnąć, kto jest zwycięzcą, to wygrywa gracz drugi. Który z graczy ma większą szansę na wygraną?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Wymnażając proporcję przez $(a+c-b)(a+b)$ po redukcji otrzymamy $3ab+b^2-c^2-3ac=0$, co daje $(b-c)(3a+b+c)=0$. Liczba $3a+b+c$ jest nieparzysta, a więc nie może być zerem, zatem $b=c$. Szukanymi trójkami są $(2n+1,2k,2k)$, gdzie liczby n, k są całkowite. Łatwo sprawdzamy, że dla każdej takiej trójki obie strony proporcji wynoszą 1.

2. Szukana długość drogi to suma długości $\frac{1}{6}$ okręgu o promieniu 1, $\frac{1}{6}$ okręgu o promieniu 2 oraz $\frac{1}{6}$ okręgu o promieniu 1, czyli $\frac{4}{3}\pi$.

3. Niech $x=a_0+a_1 10+a_2 10^2+\dots a_n 10^n$ będzie szukaną liczbą. Warunki zadania prowadzą do równości $(10^n-12)a_n+\dots+(10^2-12)a_2=11a_0+2a_1$. Ponieważ prawa strona równości nie przekracza $99+18=117$, to żadna z cyfr a_3, a_4, itd nie może być różna od 0. Mamy więc $a_3=a_4=\dots=a_n=0$, zatem $88a_2=11a_0+2a_1$. Widać, że cyfra a_1 musi być podzielna przez 11, co oznacza, że $a_1=0$. Co z kolei oznacza, że $a_0=8$ i $a_2=1$ (przypadek $a_0=a_2=0$ pomijamy, gdyż interesują nas jedynie liczby całkowite dodatnie). Zatem jedynym rozwiązaniem jest liczba 108.

4. Ponieważ I jest środkiem okręgu wpisanego, to AI, BI, CI są dwusiecznymi, a punkty A_1, B_1, C_1 są środkami odpowiednich łuków. Kąt $A_1B_1C_1$ jest oparty na sumie łuków C_1B i BA_1, a więc równy $\frac{1}{2}(\measuredangle BAC+\measuredangle ACB)$. Analogicznie pozostałe kąty.

   Kąty w trójkącie $A_2B_2C_2$ obliczamy zauważając, że kąt $C_2B_2A_2$ jest połową kąta C_2IA_2 (pierwszy jest kątem wpisanym, a drugi środkowym opartym na tym samym łuku). Z kolei $\measuredangle C_2IA_2=180-\measuredangle CBA=\measuredangle BAC+\measuredangle ACB$, co ostatecznie pokazuje, że kąty w trójkątach $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są takie same.

5. Załóżmy, że trójkąt ABC został podzielony prostą CD, $D\in AB$ oraz trójkąty ACD i BCD są podobne. Gdyby kąty $\measuredangle BDC$ oraz $\measuredangle ADC$ były różne, to obydwa musiałyby wystąpić w każdym z trójkątów ACD oraz BCD. Jednak kąty te sumują się do 180°, nie mogą więc wystąpić jednocześnie w trójkącie. Stąd $\measuredangle ADC=\measuredangle BDC=90°$. Jeżeli kąty $\measuredangle ACD$ oraz $\measuredangle DCB$ są równe, to trójkąt ABC jest równoramienny. W przeciwnym razie każdy z kątów $\measuredangle ACD$ oraz $\measuredangle DCB$ musi występować w obydwu trójkątach ACD i BCD, co oznacza, że kąty te muszą się sumować do 90° a nasz trójkąt ABC ma przy kącie C kąt prosty.

6. Równoleżnik, do którego dotarł podróżnik, jest dwa razy krótszy od równika, czyli jest na szerokości geograficznej 60°. Zatem podróż po południku to $\frac{1}{6}$ wielkiego koła Ziemi czyli $\frac{1}{6}\cdot 40000$ km. Podróżnik przebył więc $1000+\frac{40000}{6}+500+\frac{40000}{6}=14833\frac{1}{3}$ km.

7. Jeżeli kąty o mierze 108° są kolejne, to takie pięciokąty są dwa: jeden wypukły (foremny), drugi wklęsły. Rzeczywiście, jeśli kąty 108° mamy przy wierzchołkach A i B, to położenie C i E jest względem AB jednoznacznie wyznaczone, a wierzchołek D musi leżeć na symetralnej CE (czyli też symetralnej AB) w odległości 1 od C i E.

8. Zauważmy, że punkt $(0,3)$ nie leży na żadnej z podanych prostych, co oznacza, że podane proste zawierają dwa pozostałe wierzchołki trójkąta. Z kolei proste zawierające boki trójkąta, do których należy wierzchołek $(0,3)$ są prostopadłe do podanych wysokości. Znajdujemy równania tych prostych jako $y-3=-x$ oraz $y-3=3x$. Wierzchołki trójkąta leżą na przecięciu prostych zawierających boki oraz zawierających wysokości. Znajdujemy je rozwiązując odpowiednie układy równań: $(3,0)$, $(0,3)$, $(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$. Teraz równania boków łatwo otrzymać i są to: $3x-y+3=0$, $x+y-3=0$, $x-3y-3=0$.

9. Tak. Niech A oznacza zawodnika, który w danym momencie rozegrał najwięcej meczów a liczba tych meczów niech oznaczona będzie jako n. Liczba meczów, które rozegrał dowolny

z n zawodników grających z A, mieści się między 1 i n, zatem albo dla dwóch z nich te liczby są równe albo wszystkie są różne, ale wtedy jedną z tych liczb jest n.

10. Pierwszy gracz wygrywa, jeżeli na początku wypadną dwa orły i podczas kolejnych rzutów pojawi się choć jedna reszka. Przy każdej innej sekwencji na początku (czyli jeśli w pierwszych dwóch rzutach wypadnie para (R,O), (R,R) lub (O,R)) na pewno wygra gracz drugi. Zauważmy bowiem, że jeżeli wypadła reszka, to pierwszy gracz potrzebuje kolejnych dwóch orłów aby wygrać. A to oznacza, że najpierw musi pojawić się sekwencja (R,O,O). Szansa wygrania przez drugiego gracza jest więc równa co najmniej $\frac{3}{4}$, a szansa na wygraną pierwszego gracza nie przekracza $\frac{1}{4}$.