POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

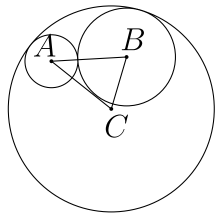
EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU

1. Jaka jest największa czterocyfrowa wielokrotność liczby 7, której wszystkie cyfry są różne?

2. Dane są trzy punkty A, B, C nie znajdujące się na jednej prostej. Punkty te są środkami okręgów, z których dwa są styczne zewnętrznie, zaś trzeci jest styczny wewnętrznie z dwoma poprzednimi (podobnie jak na rysunku). Jaki jest obwód trójkąta ABC jeśli wiadomo, że promień największego z okręgów równy jest 5 cm.

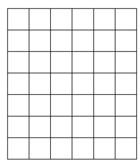


3. Elektroniczny zegar wyświetla czas w formacie 24-godzinnym (godziny i minuty), przy czym o północy pokazuje godzinę $0:00$. Przez ile minut w ciągu doby pokazuje przynajmniej jedną cyfrę 4?

4. Znajdź najmniejszą podzielną przez 3 liczbę czterocyfrową, której suma cyfr jest większa niż 32.

5. Która liczba jest większa: $\dfrac{4444444443}{8888888889}$ czy $\dfrac{3333333332}{6666666667}$?

6. Ile kwadratów, których wszystkie boki zawierają się w narysowanych liniach, można wskazać na rysunku obok?



7. Czterech poszukiwaczy skarbów odkryło tajemniczą komnatę, na środku której leżał stosik złotych monet. Niestety z powodu późnej pory wspólnie zdecydowali, że przeszukaniem komnaty i podziałem skarbu zajmą się dopiero następnego dnia rano. Niestety w nocy zaczęły się dziać dziwne rzeczy: najpierw wstał pierwszy z poszukiwaczy i zabrał połowę monet. Następnie obudził się drugi i zabrał jedną trzecią tego co zostało. Kolejny z poszukiwaczy wstał i zabrał ćwierć pozostałych monet. Ostatniego z poszukiwaczy obudził nad ranem budzik. Z przerażeniem zobaczył, że nie ma jego towarzyszy a na podłodze została niewielka kupka złożona z 12 monet. Ile monet znaleźli poszukiwacze?

8. Michał zauważył, że liczby 281 oraz 283 są liczbami pierwszymi. Postanowił sprawdzić czy wśród liczb trzycyfrowych, których cyfry setek i dziesiątek wynoszą odpowiednio 2 oraz 8 są inne liczby pierwsze. No właśnie – czy są takie liczby?

9. Suma dwóch liczb dodatnich wynosi 1. Czy ich iloczyn może być większy od 1?

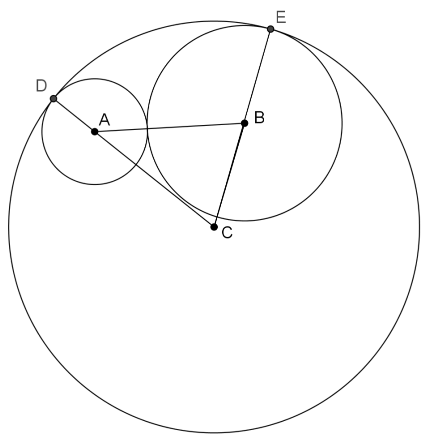
10. Dane są liczby dodatnie a, b, c, d, e, o których wiadomo, że $ab = 8$, $bc = 3$, $cd = 6$ oraz $de = 4$. Ile razy liczba a jest większa od liczby e?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zacznijmy od znalezienia największej czterocyfrowej wielokrotności liczby 7 mniejszej niż 9900. Wszystkie liczby bowiem większe niż 9900 mają dwie pierwsze cyfry równe 9, więc nie ich szukamy. Ponieważ 9 900 przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, to liczbą tą jest 9898. Odejmując kolejno liczbę 7 uzyskujemy kolejne liczby podzielne przez 7: 9891, 9884, 9877, 9870. I ta liczba jest poszukiwaną wartością: największą, dla której wszystkie cyfry są różne.

2. Popatrzmy na rysunek:



Zauważmy, że odcinki CD oraz CE mają długość 5 cm. Zauważmy również, że odcinek AB ma długość taką samą jak suma długości odcinków AD oraz BE (równą sumie długości promieni mniejszych okręgów). Obwód trójkąta ABC równy jest więc sumie długości odcinków CD oraz CE, czyli wynosi 10 cm.

3. Na pewno podczas dwóch godzin w ciągu doby – czyli między $4:00$ a $5:00$ oraz $14:00$ a $15:00$. Dodatkowo podczas każdej z pozostałych godzin między minutą 40 a 50 oraz podczas minut $4, 14, 24, 34$ i 54. Daje to w sumie $2 \cdot 60 + 22 \cdot 15 = 450$ minut w ciągu doby.

4. Jeśli suma cyfr liczby czterocyfrowej wynosi więcej niż 32 i jest podzielna przez 3 to suma ta musi wynosić 33 bądź 36. Drugi przypadek oznacza tylko jedną liczbę 9999. Rozważmy teraz pierwszy przypadek gdy suma cyfr wynosi 33. Gdybyśmy jako jedną z cyfr tej liczby wzięli 5, lub mniejszą, to największa możliwa suma cyfr wynosiłaby $9 + 9 + 9 + 5 = 32$. Nasza liczba składa się więc z cyfr równych co najmniej 6. Oczywiście jeśli jedna z cyfr jest równa 6, to pozostałe muszą być równe 9. Wstawienie 6 jako pierwszej cyfry da nam najmniejszą poszukiwaną liczbę: 6999.

5. Wygodniej będzie chyba porównać odwrotności tych liczb:

$$\frac{8888888889}{4444444443} = 2 + \frac{3}{4444444443}$$

$$\frac{6666666667}{3333333332} = 2 + \frac{3}{3333333332}.$$

Jak widać druga z tych liczb jest większa (mianownik ułamka jest mniejszy), co oznacza, że odwrotność drugiej z liczb jest mniejsza. Mamy więc

$$\frac{3333333332}{6666666667} < \frac{4444444443}{8888888889}.$$

Rozwiązanie uzyskane przy pomocy kalkulatora – poprzez porównanie odpowiednich przybliżeń dziesiętnych – nie może zostać uznane za poprawne.

6. Policzmy kwadraty 1×1. Jest ich oczywiście $6 \cdot 7 = 42$. Policzmy kwadraty 2×2: najlepiej zastanawiając się gdzie można umieścić ich lewy górny róg. Można to zrobić na $5 \times 6 = 30$ sposobów. Licząc tak wszystkie dopuszczalne rozmiary kwadratów (aż do 6×6) uzyskujemy:
$$6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 112.$$
Jeśli w rozwiązaniu uwzględnione będą wszystkie przypadki, a pomyłka wyniknie z rachunków to można odjąć 1 lub 2 punkty.

7. Skoro ostatnich 12 monet stanowiło $\frac{3}{4}$ tego co zastał przedostatni z poszukiwaczy, to musiał on widzieć 16 monet. Tyle zostawił drugi z poszukiwaczy – a ponieważ zabrał $\frac{1}{3}$ monet, które widział, to musiał ich widzieć 24. A to jest połowa monet, który były na początku. Poszukiwacze znaleźli więc w sumie 48 monet.

8. Oczywiście trzycyfrowe liczby parzyste odpadają – nie mogą być pierwsze. Podobnie liczba 285, jako podzielna przez 5. Zostają nam do sprawdzenia liczby 287 oraz 289. Liczba 287 nie jest pierwsza ponieważ dzieli się przez 7. Natomiast liczba $289 = 17^2$ również nie jest pierwsza. Widzimy więc, że innych takich liczb nie ma.

9. Oczywiście nie. Obie liczby muszą być mniejsze niż 1. A jeśli pomnożymy przez siebie dwie liczby mniejsze niż 1, to ich iloczyn będzie mniejszy od każdej z nich. Oczywiście uzasadnienie oparte na przykładzie (czy przykładach) nie stanowi poprawnego rozwiązania.

10. Zauważmy, że jeśli podzielimy przez siebie liczbę $a \cdot b$ oraz liczbę $b \cdot c$, to otrzymamy ułamek $\frac{a}{c}$, który równy jest $\frac{8}{3}$. Jeśli pomnożymy ten ułamek przez $c \cdot d$, to zauważymy, że $ad = 16$. Dalej mamy jednak
$$\frac{a \cdot d}{d \cdot e} = 16 : 4 = 4,$$
co oznacza, że $\frac{a}{e} = 4$, więc liczba a jest 4 razy większa od liczby e.

    Możemy to również policzyć w inny sposób:
$$\frac{a}{e} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot b \cdot c \cdot d} = \frac{(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)}{(b \cdot c) \cdot (d \cdot e)} = \frac{8 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 4.$$
Skoro $\frac{a}{e} = 4$, to liczba a jest 4 razy większa od liczby e.