

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

ĆWIERĆFINAŁ

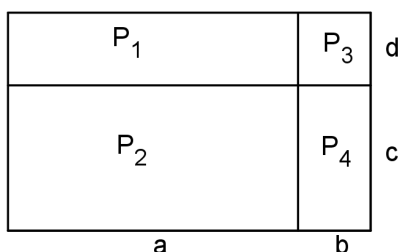
1. Dane są trzy niezerowe cyfry A, O, T . Podaj je, jeżeli wiadomo, że

$$\begin{array}{r} T \quad O \\ T \quad A \\ + \quad A \quad T \\ \hline = \quad T \quad O \quad O \end{array}$$

2. Suma trzech różnych ułamków dodatnich o licznikach równych 1, wynosi 1. Jakie to ułamki?
3. Prostokąt podzielono na cztery prostokąty dwiema prostymi prostopadłymi. Dwa z tych prostokątów, nieposiadające wspólnego boku, mają pola 1 i 2. Jeden z pozostałych ma pole 4. Ile wynosi pole podzielonego prostokąta?
4. Mateusz numerował strony 50-kartkowej książki "Najpiękniejsze czworokąty Świata". Numery stron, w których suma cyfr była podzielna przez 4, pisał kolorem niebieskim, a pozostałe czarnym. Ile niebieskich cyfr napisał Mateusz?
5. W stadzie zgodnie odpoczywają dwa gatunki smoków: dwunożne i dwugłowe smoki pospolite oraz dwunożne i czterogłowe smoki dymne. Ile jest smoków w stadzie, jeśli razem mają 96 nóg i 124 głowy?
6. Ile co najmniej kolorów należy użyć do pomalowania krawędzi sześcianu, aby krawędzie o wspólnym końcu miały różne kolory?
7. Bakterie *Totalis krejsis* rozmnażają się w bardzo dziwny sposób. Co godzinę bakterie te łączą się w trójki, a następnie każda taka trójka dzieli się na 5 nowych bakterii. Bakterie, dla których w danej godzinie zabrakło towarzyszy do połączenia się w trójkę, nie rozmnażają się w tej godzinie. Ile bakterii *Totalis krejsis* było na początku, jeśli po trzech godzinach było ich 27?
8. W rozgrywkach piłki nożnej drużyny Anglii, Belgii i Czech znalazły się w jednej grupie i rozegrały między sobą mecze (każdy z każdym po jednym meczu). Wynik meczu Anglii z Belgią to 3 : 2, ale Anglicy strzelili Czechom tylko jednego gola, Ponadto we wszystkich tych meczach Belgia strzeliła w sumie 3 gole, Czechy 4 gole zaś Anglia straciła 5 bramek. Ustal wyniki wszystkich trzech spotkań.
9. W pewnym trójkącie miary dwóch kątów wynoszą 60° i 80° . Z wierzchołka trzeciego kąta opuszczono wysokość, która podzieliła ten kąt na dwa mniejsze kąty. Podaj ich miary.
10. Asia jest dwa razy starsza niż Basia, ale dwa razy młodsza niż Kasia. Gdy Basia się urodziła, Kasia miała 9 lat. Za ile lat Asia, Basia i Kasia będą miały w sumie 51 lat?

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

- Jeżeli dodamy do siebie 3 liczby dwucyfrowe, to uzyskamy nie więcej niż $3 \cdot 99 = 297$. Stąd $T = 1$ lub $T = 2$. W takim razie możemy maksymalnie uzyskać $29 + 29 + 92 = 140$, więc $T = 1$. Ponieważ $O + A + 1$ jest liczbą, której ostatnia cyfra jest równa O , to A musi być równe 9 i do kolumny "dziesiątek" przenosimy 1. Oznacza to, że $T + T + A + 1 = 10 + O$, czyli $O = 2$.
- Jeden z ułamków musi być większy od $\frac{1}{3}$, zatem wynosi $\frac{1}{2}$. Jeden z pozostałych ułamków musi być większy od $\frac{1}{4}$, więc jest równy $\frac{1}{3}$. Bezpośrednio wyliczamy trzeci równy $\frac{1}{6}$.
- Popatrzmy na rysunek



Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $P_1 = 2$, $P_4 = 1$, zaś $P_2 = 4$. Przy oznaczeniach jak na rysunku wiadomo, że $a \cdot d = 2$ oraz $a \cdot c = 4$. A to oznacza, że $c = 2 \cdot d$. Podobnie widzimy, że $a = 4 \cdot b$. Oznacza to, że $c \cdot a = 8 \cdot b \cdot d$, czyli $P_3 = \frac{1}{2}$, a pole dużego prostokąta wynosi $7\frac{1}{2}$.

- Książka ma 100 stron. Popatrzmy na numery stron w kolejnych dziesiątkach. Ich sumy w pierwszej dziesiątce to liczby od 1 do 9. Podzielne przez 4 są dwie z nich. Sumy w drugiej dziesiątce (od 10 do 19) to wartości od 1 do 10. Niebieskie cyfry będą tu 4 (w liczbach 13 oraz 17). W kolejnej dziesiątce mamy sumy od 2 do 11 i cztery niebieskie cyfry. Następnie sumy od 3 do 12 i sześć niebieskich cyfr. W kolejnych dziesiątkach mamy sumy: od 4 do 13 (sześć niebieskich cyfr), od 5 do 14 (cztery cyfry niebieskie), od 6 do 15 (cztery cyfry niebieskie), od 7 do 16 (tym razem sześć cyfr niebieskich), od 8 do 17 (sześć cyfr niebieskich) oraz od 9 do 18 (cztery cyfry niebieskie). Ostatni zapisany numer strony (czyli 100) zapisany będzie kolorem czarnym. W sumie mamy:

$$2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 + 4 + 6 + 6 + 4 = 46$$

cyfr niebieskich.

- Ponieważ oba gatunki smoków mają po dwie nogi, zatem wszystkich smoków w stadzie jest $96 : 2 = 48$. Gdyby to były tylko smoki pospolite, to miałyby łącznie jedynie $2 \cdot 48 = 96$ głów, co jest o $124 - 96 = 28$ za mało. Zauważmy, że wymiana jednego smoka pospolitego na jednego smoka dymnego zwiększa liczbę głów o 2, co oznacza, że aby zwiększyć liczbę głów o 28 należy wymienić 14 smoków. Ostatecznie, w stadzie jest 14 smoków dymnych i $48 - 14 = 34$ smoki pospolite.
- Z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie – musimy więc użyć przynajmniej 3 kolory. I tyle wystarczy – dla przykładu można pokolorować wszystkie 4 krawędzie równoległe tym samym kolorem – krawędzie równoległe na pewno nie mają punktu wspólnego.

Uwaga: jeśli w zadaniu nie pojawi się argument, że kolory muszą być co najmniej 3, to zadanie nie może być uznane za rozwiązane!

7. Przeanalizujemy sytuację "od końca". Popatrzmy ile pełnych "piątek" mieści się w 27 – jest ich dokładnie 5 – zostają jeszcze 2 bakterie, które się nie rozmnożyły. Czyli godzinę temu było $5 \cdot 3 + 2 = 17$ bakterii. Tutaj mamy 3 pełne piątki i jeszcze dwie bakterie – czyli dwie godziny temu było $3 \cdot 3 + 2 = 11$ bakterii. I podobnie ustalamy, że trzy godziny temu było $2 \cdot 3 + 1 = 7$ bakterii
8. Belgia strzeliła dwa gole Anglii, więc jednego musiała strzelić Czechom. Anglicy stracili 5 bramek: dwie z Belgią, z Czechami musieli więc stracić trzy. Stąd wynik meczu Anglia-Czechy to $1 : 3$. Czesi strzelili w sumie cztery bramki – trzy Anglii, więc jedną Belgii. W meczu Belgia-Czechy musiał więc paść wynik $1 : 1$.
9. Zauważmy, że trójkąt jest ostrokątny więc każda jego wysokość leży wewnątrz trójkąta. Wysokość podzieliła nasz trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. Jeden z nich ma jeden z kątów ostrych równy 60° , czyli drugi musi być równy 30° . Z kolei w drugim trójkącie jeden z kątów ostrych ma miarę 80° – to oznacza, że drugi ma miarę 10° . Wysokość podzieliła więc kąt trójkąta na kąty o miarach 10° oraz 30° .
10. Kasia jest o 9 lat starsza od Basi i jednocześnie 4 razy od niej starsza. Czyli te 9 lat stanowi trzykrotność wieku Basi. Basia ma więc 3 lata, zaś Kasia lat 12. Asia ma więc lat 6. W sumie mają 21 lat. Aby w sumie miały 51 lat musi minąć 10 lat.