POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Z powodu błędu drukarskiego w książce "Przewodnik po trapezie równoramiennym" nie zostały wydrukowane numery stron, zawierające cyfry podzielne przez 3. Książka składa się z 300 stron – na ilu stronach zostały wydrukowane ich numery?

2. Suma 4 kolejnych liczb naturalnych jest o 19 większa od sumy dwóch najmniejszych z nich. Jakie to liczby?

3. Znajomi z dwóch różnych miejscowości umówili się na spotkanie w połowie drogi. Jeden z nich zapowiedział, że na spotkanie pójdzie pieszo, zaś drugi, że pojedzie rowerem. Pieszy powiedział, że będzie poruszał się z prędkością 6 km na godzinę. Kolarz postanowił, że wyjedzie wtedy, gdy pieszy będzie w połowie swojej drogi, a na miejsce dotrze w chwili gdy pieszemu zostanie do przejścia jedna piąta drogi. Z jaką prędkością powinien jechać rowerzysta?

4. Ile zer występuje w zapisie dziesiętnym liczby, która jest jedną setną iloczynu liczb dwa tysiące, trzy tysiące oraz pięć tysięcy?

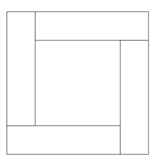
5. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę dwa razy większą od miary innego z kątów. Ile stopni ma każdy z kątów tego trójkąta?

6. Jaś ma urodziny 1 maja, zaś Małgosia 1 marca. Dnia 1 października 2016 roku Małgosia pochwaliła się Jasiowi: "Dzisiaj do moich kolejnych urodzin brakuje mniej dni niż minęło od twoich ostatnich urodzin!" Czy ma rację?

7. Na ścianie pokoju Ali wiszą w równym rzędzie jej wszystkie medale: dwa brązowe, pięć złotych i pewna liczba srebrnych. Każdy medal złoty wisi pomiędzy dwoma srebrnymi, zaś każdy medal srebrny sąsiaduje z jednej strony ze złotym, a z drugiej strony z medalem srebrnym lub brązowym. Ile medali srebrnych ma Ala?

8. Jaś i Małgosia starają się znaleźć dwie takie liczby dwucyfrowe by, po podzieleniu z resztą większej z nich przez mniejszą, uzyskać jak największą resztę. Jakie liczby (i dlaczego takie) powinni wybrać?

9. Kwadrat o boku 10 cm podzielono na mniejszy kwadrat i cztery jednakowe prostokąty (jak na rysunku). Ile wynosi pole każdej z części jeśli wiadomo, że wszystkie mają ten sam obwód?



10. W zielonym i niebieskim woreczkach było po tyle samo cukierków. Antek przełożył połowę cukierków z zielonego woreczka do niebieskiego, ale nie zauważył, że dwa przekładane cukierki spadły pod stół. Następnie Antek przełożył czwartą część cukierków z niebieskiego woreczka do zielonego. Wtedy spostrzegł pod stołem dwa cukierki i dołożył je do zielonego woreczka. Okazało się, że w woreczkach znowu jest cukierków po równo. Ile było cukierków?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zostały wydrukowane tylko te numery stron, które zapisujemy jedynie przy użyciu cyfr $1, 2, 4, 5, 7, 8$. Ponumerowanych jest więc 6 stron o numerach jednocyfrowych, $6 \cdot 6 = 36$ o numerach dwucyfrowych oraz $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ o numerach trzycyfrowych (tylko te gdzie cyfra setek wynosi 1 lub 2). Razem mamy więc ponumerowanych $6 + 36 + 72 = 114$ stron. Uwaga: jeśli rozwiązujący zapomni o tym, że 0 jest podzielne przez 3, to proponujemy uznać to zadanie za zrobione – ale nie przyznawać więcej niż 6 punktów.

2. Stąd wynika, że suma dwóch największych z tych liczb wynosi 19. Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych wynosi 19 tylko gdy liczby te to 9 oraz 10. Pozostałymi liczbami są więc 7 oraz 8.

3. Rowerzysta i pieszy pokonają tą samą odległość, przy czym rowerzysta potrzebuje na to jedynie $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ czasu, który potrzebuje pieszy. Prędkość rowerzysty powinna więc wynosić $\frac{10}{3}$ prędkości pieszego. Powinien więc jechać z prędkością 20 km/h.

4. Iloczyn $2\ 000 \cdot 5\ 000$ wynosi 10 milionów i do jego zapisu potrzebujemy 7 zer. Pomnożenie tej liczby przez 3 000 oznacza, że potrzebujemy do zapisu wyniku 10 zer. Jedna setna z tej liczby kończy się 8 zerami.

5. Mamy tutaj dwie możliwości: albo jeden z kątów jest dwa razy mniejszy od kąta prostego – wtedy kąty trójkąta mają miary $90°$, $45°$, $45°$ – albo jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Wtedy $90°$ przypadające na oba katy ostre musi zmieścić w sobie dokładnie trzy mniejsze kąty. Mniejszy kąt musi więc mieć miarę $30°$, zaś większy $60°$.

   Uwaga: znalezienie jednego rozwiązania daje za zadanie maksymalnie 5 punktów (zadanie nie jest rozwiązane).

6. Rok 2017 nie jest rokiem przestępnym i warto to wziąć pod uwagę. Od 1 października do 1 marca przyszłego roku minie 31 dni października, 30 dni listopada, 31 dni grudnia oraz stycznia, i 28 dni lutego. Z drugiej strony od 1 maja (czyli od ostatnich urodzin Jasia) minęło 31 dni maja, 30 dni czerwca, 31 dni lipca i sierpnia oraz 30 dni września. Rachunek:

$$31 + 30 + 31 + 31 + 28 < 31 + 30 + 31 + 31 + 30$$

   pokazuje, że Małgosia ma rację...

7. Zauważmy w pierwszej kolejności, że medal złoty ani srebrny nie mogą znajdować się na początku ani na końcu rzędu – każdy z nich ma dwóch sąsiadów. Na końcach muszą więc znaleźć się medale brązowe. Obok brązowych muszą znaleźć się srebrne. W dalszym ciągu między dwoma złotymi muszą znaleźć się dwa srebrne (ponieważ żaden srebrny nie może sąsiadować z dwoma złotymi. Musi być więc następujący układ medali

   B S Z S S Z S S Z S S Z S S Z S B

   Razem jest 10 srebrnych medali.

8. Przy dzieleniu 99 przez 50 uzyskujemy resztę 49. Większej nie możemy uzyskać: gdyby była reszta równa co najmniej 50, to musielibyśmy dzielić co najmniej przez 51 i dzielna musiałaby być równa co najmniej $1 \cdot 51 + 50 = 101$ a to nie jest już liczba dwucyfrowa.

9. Zauważmy, że obwód prostokąta jest równy sumie długości dwóch boków większego kwadratu czyli wynosi 20 cm. Jeśli mniejszy kwadrat ma taki sam obwód, to jego bok ma długość 5 cm. A to oznacza, że pole małego kwadratu wynosi 25 cm^2, zaś pole każdego z prostokątów wynosi $(100 - 25) : 4 = 18,75$ cm^2.

10. Oznaczmy początkową liczbę cukierków w każdym woreczku przez C. Mamy wtedy po kolei:

	woreczek zielony	**woreczek niebieski**
krok 1	C	C
krok 2	$\frac{1}{2}C$	$C + \frac{1}{2}C - 2$
krok 3	$\frac{1}{2}C + \frac{1}{4}\left(C + \frac{1}{2}C - 2\right) + 2$	$\frac{3}{4}\left(C + \frac{1}{2}C - 2\right)$

Po wszystkim w obu woreczkach musi być tyle samo (a więc C) cukierków. Można na tej podstawie ułożyć równanie i je rozwiązać. Wychodzi $C = 12$ co oznacza, że mamy w sumie 24 cukierki.