POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Antek, Arek i Adam kupili po jednym batonie. Baton Arka był dwa i pół raza droższy od batona Antka. Baton Adama był o połowę droższy od batona Arka i o 1 zł 10 gr droższy od batona Antka. Ile pieniędzy chłopcy wydali na batony?

2. W dwóch beczkach było łącznie 40 l wody. Antek przelał 1/3 wody z pierwszej beczki do drugiej, a następnie 1/3 wody z drugiej beczki do pierwszej. Okazało się, że w każdej z beczek jest tyle samo wody. Ile wody było w każdej z beczek zanim przyszedł Antek?

3. Pewnego roku sobót było tyle samo co niedziel, ale więcej niż piątków. Jakiego dnia tygodnia rozpoczynał się ów rok?

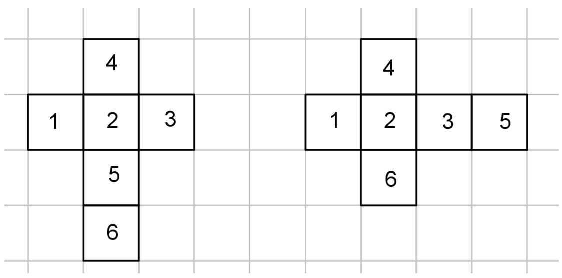
4. Na ile sposobów można w liczbie 9 876 543 210 987 654 321 zmienić cyfry miliardów i milionów tak, aby otrzymana liczba była podzielna przez 9?

5. Jakie ułamki o mianowniku 7 można znaleźć na osi liczbowej między ułamkami $\frac{7}{9}$ a $\frac{11}{12}$?

6. Antek rysował strzałki na stronach książki po kolei skierowane do góry, w prawo, na dół, w lewo, do góry itd. Zaczął od strony 1 i skończył na stronie 200. Okazało się jednak, że książka była źle wydrukowana i nie było co trzeciej strony zaczynając od strony 3. W którą stronę była skierowana ostatnia strzałka?

7. Antek obserwował w Sopocie kolejki jeżdżące między Gdańskiem i Gdynią. Kolejki z Gdyni wyjeżdżały co 20 min. począwszy od godziny 4.10 i po 20-tu minutach przejeżdżały przez Sopot. Kolejki z Gdańska także wyjeżdżały co 20 minut począwszy od 4.00 i po kwadransie przejeżdżały przez Sopot. Antek swoją obserwację przeprowadził w godzinach 5.53-7.22. Ile kolejek zaobserwował?

8. Mamy dwie siatki sześcianu



   Czy po złożeniu oba sześciany będą analogicznie opisane liczbami?

9. Ślimak wspinał się na drzewko wysokości 2 m. W dzień przebywał drogę 30 cm w górę, a w nocy gdy spał, zsuwał się 20 cm w dół. Po ilu dniach i nocach dotarł na szczyt drzewka?

10. W wierzchołkach kwadratu o boku 2 znajdują się środki kół o promieniu 1. Jakie jest pole figury złożonej z kwadratu i tych czterech kół?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła podstawowa

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeżeli Antek zapłacił x zł, to Arek $2,5x$ zł, a Adam $1,5 \cdot 2,5x$ zł, zatem $x = 0,4$ i chłopcy wydali 2 zł 90 gr.

2. Jeżeli na końcu w obu beczkach było tyle samo wody, to w każdej będzie 20 litrów. Analizując "od tyłu" ilości wody w litrach będą (20,20), (10,30), (15,25).

3. Reszta z dzielenia 365 przez 7 wynosi 1. Oznacza to, że w roku zwykłym (nie przestępnym) co najwyżej jeden dzień tygodnia może się powtórzyć. Jeśli powtórzyły się dwa dni tygodnia, to musiał to być rok przestępny. Co więcej rok ten kończył się niedzielą – musiał więc zacząć się sobotą.

4. Suma cyfr tej liczby wynosi 90. Liczba jest więc podzielna przez 9. Cyfra milionów to 7, zaś cyfra miliardów to 0.

   Pytamy się na ile sposobów możemy zmieniać obie cyfry jednocześnie, tak by (po zmianie) suma wszystkich cyfr była podzielna przez 9. Suma pozostałych cyfr wynosi $90-0-7 = 83$. Wtedy te dwie zmienione cyfry muszą dać w sumie 7 lub 16. Więcej nie może być ponieważ suma dwóch cyfr na pewno nie przekroczy 18. Mamy następujące możliwości zmiany obu cyfr (w poniższych sumach pierwszy składnik odpowiada cyfrze miliardów, drugi cyfrze milionów):

   - $7 = 1 + 6$;
   - $7 = 2 + 5$;
   - $7 = 3 + 4$;
   - $7 = 4 + 3$;
   - $7 = 5 + 2$;
   - $7 = 6 + 1$;
   - $7 = 7 + 0$;
   - $16 = 7 + 9$;
   - $16 = 8 + 8$.

   W każdej z tych możliwości zmieniają się obydwie cyfry. Razem mamy 9 możliwości.

5. Zauważmy, że najmniejszy wspólny mianownik dla ułamków o mianownikach 9, 12 oraz 7, to $9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$. Piszemy:
$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 7}{252} = \frac{196}{252}$$
   oraz
$$\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 7}{252} = \frac{231}{252}.$$
   Ułamki o mianowniku 7 rozszerzone do mianownika 252 muszą mieć w liczniku wielokrotność liczby 36. Jedyną wielokrotnością 36 między 196 a 252 jest $6 \cdot 36 = 216$, co oznacza, że poszukiwanym ułamkiem jest $\frac{6}{7}$.

   Uwaga: znalezienie jednego rozwiązania daje za zadanie maksymalnie 5 punktów (zadanie nie jest rozwiązane).

6. Jeżeli policzymy wszystkie wielokrotności liczby 3 mniejsze niż 200, to największą z nich jest $66 \cdot 3 = 198$, jest ich więc 66. Wszystkich stron było więc $200 - 66 = 134$. Ponieważ $134 = 4 \cdot 33 + 2$, to ostatnia strzałka była skierowana w prawo.

7. Kolejki z Gdańska zjawiały się w Sopocie od 4.15 co 20 minut. Kolejki z Gdyni zjawiały się w Sopocie od 4.30 i również pojawiały się co 20 minut. W podanym przedziale czasu Antek widział kolejki: z Gdyni o godzinie: 6.10, 6.30, 6.50, 7.10; z Gdańska o godzinie: 5.55, 6.15, 6.35, 6.55, 7.15. Razem widział 8 kolejek.

8. Nie. Ściany 2, 3, 5 w lewym sześcianie będą miały wspólny wierzchołek, w prawym nie.

9. Po całym dniu i nocy ślimak pokonuje odległość 10 cm w górę. Czyli po 17 dniach wspina się na wysokość 170 cm. Po kolejnym dniu będzie na wysokości $170 + 30 = 200$ cm. Odp. 17 nocy i 18 dni.

10. Zwróćmy uwagę na to, że część każdego z kół (dokładnie $\frac{1}{4}$) zawiera się w kwadracie. W związku z tym odpowiedź to $2^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = 4 + 3\pi$.