

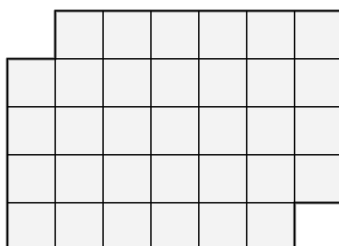
POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

FINAŁ

1. Czy figurę przedstawioną na rysunku można podzielić, wzdłuż zaznaczonych linii, na dwie identyczne części?



2. Wzdłuż prostej ścieżki leśniczy posadził buk, cis i dąb. Jaka jest odległość między bukiem a cisem, jeśli wiadomo, że od dębu do cisa jest 12 m, a cis rośnie trzy razy dalej od dębu niż buk?
3. Jacek ułożył z klocków wymiaru $1 \times 1 \times 1$ dziwny sześcián wymiaru $3 \times 3 \times 3$. Niektórych klocków brakowało. Patrząc na dowolną ścianę (również na tą górną!) Jacek widział kwadrat z dziurą po środku przez cały sześcián. Ilu klocków użył Jacek do budowy?
4. W pewnym trójkącie jeden kąt jest 6 razy większy od drugiego. Jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 12° . Jakie miary mają pozostałe kąty?
5. Ewa dostała zaszyfrowane działanie $ABC + ABC + ABC + ABC = CDE$, w którym każda litera oznacza pewną cyfrę (zawsze taką samą) ale różnym literom odpowiadają różne cyfry. Zadanie wydało się jej strasznie trudne – odetchnęła jednak z ulgą, gdy dowiedziała się, że litera A odpowiada cyfrze większej od 1. Jakie to działanie?
6. We wszystkich piątých klasach pewnej szkoły podstawowej uczy się więcej niż 50, a mniej niż 100 uczniów. Co siódmy z nich dostał z klasówki ocenę celującą, co trzeci piątkę, a połowa uczniów otrzymała czwórkę. Ilu uczniów jest w piątých klasach?
7. Gdy Anka miała tyle lat, ile Danka ma teraz, to była od niej trzy razy starsza. Gdy Danka będzie miała tyle lat, ile Anka ma teraz, Anka będzie miała 42 lata. Ile lat ma obecnie każda z dziewcząt?
8. W jednym pokoju spotkało się pięć osób. Ci, którzy się znali podali sobie, na powitanie, ręce. Czy jest możliwe, że każdy przywitał się z dokładnie trzema osobami?
9. Jaką cyfrę jedności ma wynik mnożenia wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych?
10. Uzasadnij, że każdą liczbę większą od 20 można przedstawić w postaci sumy wyłącznie piątek i czwórek (przy czym nie musimy używać obu tych cyfr).

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła podstawowa

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Nie, ponieważ figura składa się z nieparzystej liczby kwadracików.
2. Są dwie możliwości:
 - cis – 8 m – buk – 4 m – dąb , wówczas szukana odległość 8 m.
 - cis – 12 m – dąb – 4 m – buk , wówczas szukana odległość $12\text{ m} + 4\text{ m} = 16\text{ m}$
3. Widać, że był to sześciian z usuniętymi klockami ze środka każdej ściany i ze środka sześciianu. Zatem Jacek użył $27 - 6 - 1 = 20$ klocków.
4. Do rozpatrzenia są 3 przypadki.
 - Jeden z kątów ma 12° , drugi $12^\circ : 6 = 2^\circ$, a wówczas trzeci ma $180^\circ - 14^\circ = 166^\circ$.
 - Jeden z kątów ma 12° , drugi $6 \cdot 12^\circ = 72^\circ$, a wówczas trzeci ma $180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.
 - Wśród dwóch pozostałych kątów jeden jest 6 razy większy od drugiego. W sumie dają jednak $180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$. Miara mniejszego równa jest $168^\circ : 7 = 24^\circ$, większy ma więc $6 \cdot 24^\circ = 144^\circ$.
5. Jedyną możliwą wartością dla A jest 2 (w przeciwnym razie suma byłaby większa od 1000). Wtedy $C = 8$ lub $C = 9$. Gdyby $C = 8$, to $E = 2$, a więc tyle co A , co nie jest możliwe. Musi więc być $C = 9$, $E = 6$ i do kolumny z cyframi dziesiątek przenosimy 3. Daje to zależność $4 \cdot B + 3 = 10 + D$. Jedyne rozwiązanie możliwe bez powtarzania już wykorzystanych cyfr to $B = 3$ i $D = 5$. Działanie to $239 + 239 + 239 + 239 = 956$.
6. Liczba uczniów dzieli się przez 7, 3 i 2, zatem jest wielokrotnością 42. Musi więc być 84 uczniów.
7. Oznaczmy różnicę wieku Anki i Danki przez r (Anka jest starsza). Czyli za r lat Anka będzie miała 42 lata. Ale r lat temu Anka miała $42 - 2r$ lat i była wtedy 3 razy starsza od Danki. Jeżeli była 3 razy starsza od Danki, to różnica wieku musiała być dwukrotnie większa od wieku Danki. Czyli wtedy Danka miała $\frac{1}{2}r$ lat, zaś Anka $\frac{3}{2}r$ lat. Daje nam to równanie
$$42 - 2r = \frac{3}{2}r,$$
co oznacza, że $r = 12$ i obecny wiek Anki to 30 lat, zaś Danki 18 lat.
8. Nie. Argument I: A zna się z B,C,D, zatem E też zna się z B,C,D. Z tej trójki dwóch musi się znać, a trzeci nie ma z kim. Argument 2: policzmy łączną liczbę "wyciągnięć rąk" na powitanie – każdy człowiek wyciągałby rękę 3 razy – dałoby to 15 "wyciągnięć rąk". Ale liczba ta musi być parzysta ponieważ każde powitanie składa się z dwóch "wyciągnięć rąk".
9. Iloczyn ten będzie nieparzystą wielokrotnością piątki więc ostatnią cyfrą tej liczby będzie 5.
10. Oczywiście przy pomocy sumy samych czwórek możemy uzyskać wszystkie liczby podzielne przez 4. Aby uzyskać liczbę, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1 musimy wziąć wynik z dzielenia tej liczby przez 4 (oznaczymy go przez n) i wykonać działanie $4(n - 1) + 5$. W ten sposób uzyskamy dowolną liczbę dającą przy dzieleniu przez 4 resztę 1 ale nie mniejszą od 5.

Podobnie, jeśli weźmiemy liczbę, która po podzieleniu z resztą przez 4 da wynik n i resztę 2, to liczba ta da się zapisać jako $4(n - 2) + 2 \cdot 5$. Dotyczy to każdej liczby tej postaci nie mniejszej niż 10.

I na koniec, jeśli weźmiemy liczbę, która po podzieleniu z resztą przez 4 da wynik n i resztę 3, to liczba ta da się zapisać jako $4(n - 3) + 3 \cdot 5$. Dotyczy to każdej liczby tej postaci nie mniejszej niż 15.

Czyli wszystkie liczby większe od 20 można zapisać w ten sposób niezależnie od tego jaką resztę dają przy dzieleniu przez 4.