POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA II – rok szkolny 2016/2017

poziom: szkoła podstawowa

PÓŁFINAŁ

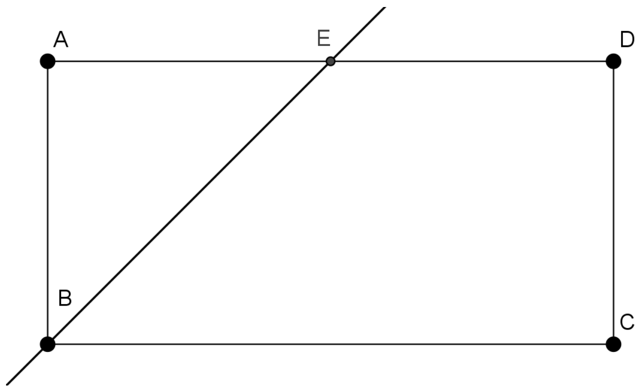
1. W ciągu roku wiek pięciu członków pewnej rodziny wzrósł odpowiednio o 4%, 5%, 10%, 20% i 25%. Jaki był średni wiek członków rodziny po upłynięciu tego roku?
2. Obwód prostokąta wynosi 108 cm. Dwusieczna jednego z kątów dzieli prostokąt na dwie figury, których obwody różnią się o 32 cm. Podaj pole prostokąta.
3. Sześć jednakowych trapezów równoramiennych połączono ramionami tak, że krótsze i dłuższe podstawy tworzą sześciokąty. Ile wynosi pole tej figury, jeżeli zarówno krótsze podstawy jak i ramiona trapezów mają taką samą długość, zaś pole mniejszego sześciokąta wynosi 6 cm^2?
4. Z dwóch różnych równoramiennych trójkątów prostokątnych (czyli z dwóch połówek różnych kwadratów) złożono trapez, którego pole jest równe 15 cm^2. Podaj pole mniejszego z tych trójkątów.
5. Gdy Mateusz zapytał Małgosię, jaki jest numer jej szafki szkolnej, usłyszał odpowiedź: "Jest to największa liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje iloraz równy reszcie. Aha, w naszej szkole szafki numerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi począwszy od 1, a moja szafka ma środkowy numer". Ile szafek szkolnych jest w szkole Małgosi?
6. W szkole w Pierwiastkowie uczy się mniej niż 500 dzieci, przy czym dziewczęta stanowią $\frac{8}{13}$ wszystkich uczniów. W dodatku, w każdej z 25 klas jest tyle samo osób. Ania, która chodzi do klasy Ia w tej szkole ma dziś urodziny i przyniosła po jednym kawałku ciasta dla każdego ucznia z Ia oraz dla pani Mądralińskiej – swojej wychowawczyni. Ile kawałków ciasta przyniosła Ania?
7. Piotr i Paweł malowali płot. Piotr pracował dwa razy szybciej niż Paweł, więc cały płot pomalowaliby w sześć godzin. Jednak po 2 godzinach Piotr zostawił Pawła samego z tym zadaniem i wybrał się z kolegami do kina. Ile czasu Paweł musiał sam malować płot, aby dokończyć pracę?
8. Na stosie była pewna liczba kartek. Adaś zdjął ze stosu wszystkie kartki według następującej reguły: jeżeli na stosie była nieparzysta liczba kartek, zdejmował jedną; a jeśli liczba ta była parzysta, zdejmował połowę kartek. Ile było kartek na stosie, jeżeli Adaś trzykrotnie zdejmował po jednej kartce, a siedmiokrotnie większą ich liczbę – przy czym wiadomo, że na początku była nieparzysta liczba kartek.
9. Układamy posadzkę z jednokolorowych płytek w kształcie sześciokątów foremnych (jak komórki w plastrze miodu w ulu). Jaka jest minimalna liczba kolorów płytek, aby możliwe było takie ułożenie posadzki, żeby płytki stykające się bokami miały różne kolory?
10. Podczas czterogodzinnego treningu kolarz przejechał parzystą liczbę kilometrów, przy czym kilometry parzyste przejeżdżał z prędkością 10 km/godz, a nieparzyste z prędkością 30 km/godz. Jaką miał średnią prędkość?

PMM – rok szkolny 2016/2017 – poziom: szkoła podstawowa

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeśli w ciągu roku wiek osoby wzrósł o 25%, to oznacza to, że osoba ta miała 4 lata (ponieważ 25% z 4 lat to 1 rok). Kolejne osoby musiały więc mieć 5, 10, 20 oraz 25 lat, co dawało średni wiek równy $(4+5+10+20+25)/5 = 64/5 = 12,8$ lat. Po roku ich średni wiek wynosił $13,8$ lat.

2. Popatrzmy na rysunek:



Ze względu na to, że kąty ABE oraz BEA są równe (miara obu wynosi 45°), to długości odcinków AB oraz AE są takie same. Jak widzimy, różnica obwodów trójkąta ABE oraz czworokąta $BCDE$ równa jest dwukrotności długości odcinka ED. Odcinek ED ma więc długość 16 cm. Jeżeli długość odcinka AB (a tym samym również odcinka BE) oznaczymy przez a, to mamy

$$a + a + 16 + a + a + 16 = 108,$$

co oznacza, że $4a = 76$, czyli $a = 19$. Stąd jeden z boków prostokąta ma długość 19 cm, zaś drugi 35 cm. Pole prostokąta wynosi $19 \cdot 35 = 665$ cm^2.

3. Oczywiście każdy z boków większego sześciokąta ma tę samą długość (równą długości dłuższej podstawy trapezu). Podobnie jest dla mniejszego sześciokąta. Ponadto, ponieważ każdy z trapezów jest taki sam, to każdy z kątów wewnętrznych powstałych sześciokątów musi mieć taką samą miarę – oba sześciokąty są więc foremne. Oznacza to, że kąty przy dłuższej podstawie trapezów mają miarę 60°, a tym samym dłuższa podstawa trapezu jest dwa razy dłuższa od jego ramienia. Oznacza to, że oba sześciokąty są podobne do siebie w skali 1 : 2. Skoro pole mniejszego sześciokąta wynosi 6 cm^2, to pole większego musi wynosić $4 \cdot 6 = 24$ cm^2, a pole powstałej figury to $24 - 6 = 18$ cm^2.

4. Skoro z trójkątów złożono trapez, to trójkąty musiały być złączone jednym z boków. Ponieważ trójkąty te są różne, to bok ten musi być przyprostokątną jednego z trójkątów a przeciwprostokątną drugiego. W tej sytuacji mniejszy trójkąt jest połową większego i pole trapezu równe jest trzykrotności pola mniejszego trójkąta. Czyli pole mniejszego trójkąta wynosi 5 cm^2.

5. Oczywiście im większy iloraz tym większa liczba – ale iloraz nie może być większy niż 6 więc największa liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje iloraz równy reszcie, to $7 \cdot 6 + 6 = 48$. Szafek o numerach mniejszych niż 48 jest 47. Tyle samo musi być również szafek o numerach większych. W sumie jest więc $48 + 47 = 95$ szafek.

6. Łączna liczba uczniów musi być podzielna przez 13 (ponieważ tylko wtedy $\frac{8}{13}$ liczby wszystkich uczniów będzie liczbą całkowitą) oraz przez 25 (bo tyle jest klas, zaś w każdej jest taka sama liczba uczniów). Takie liczby to $13 \cdot 25 = 325$ i wszystkie wielokrotności tej wartości. Jednak spośród tych wielokrotności jedynie 325 jest mniejsze niż 500, więc w każdej klasie uczy się 13 osób. Ania musiała więc przynieść 14 kawałków ciasta.

7. Pracując razem Piotr i Paweł mają wydajność taką jak trzech Pawłów. Czyli Paweł na pomalowanie płotu potrzebowałby 18 godzin. Po dwóch godzinach wspólnej pracy chłopcy pomalowali 1/3 płotu, dla samego Pawła zostało więc do pomalowania 2/3 płotu. Pawłowi zajmie to jeszcze $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ godzin.

8. Warto zauważyć, że dwa ostatnie ruchy Adasia polegały na wzięciu jednej kartki. Pierwszy również. Czyli Adaś raz zdjął jedną kartkę, następnie 7 razy z rzędu połowę kartek, a później dwukrotnie po jednej kartce. Analizując sytuację "od końca" widzimy, że łączna liczba kartek wynosiła 257.

9. Oczywiście dwa kolory nie wystarczą, ale trzy tak. Oznaczmy płytki różnych kolorów przez A,B,C. Układamy pierwszy rząd w kolejności A,B,C,A,B,C,... Następny układamy tak, aby do pierwszych A,B dotykał C, następnie w porządku jak wyżej (ewentualnie w obie strony). Na tej zasadzie układamy kolejne rzędy.

10. Zauważmy, że na kilometry parzyste kolarz poświęcił 3 razy tyle czasu co na kilometry nieparzyste. Czyli kilometry parzyste pokonał w ciągu 3 godzin, zaś nieparzyste w ciągu 1 godziny. Razem pokonał więc 30 kilometrów nieparzystych i 30 parzystych, czyli łącznie 60 kilometrów. Skoro poświęcił na to 4 godziny, to średnia prędkość wynosiła 15 km/h.