POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

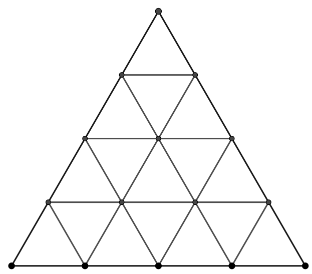
poziom: gimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Adam i Jacek spotkali się na starcie 400 metrowej bieżni stadionowej. Adam wystartował pieszo i utrzymywał stałą prędkość 4 km/godz, a Jacek wystartował równocześnie na rowerze w tym samym kierunku i utrzymywał prędkość 20 km/godz. Gdy Jacek spotkał Adama, zmienił kierunek jazdy na przeciwny, ale utrzymał prędkość i postępował tak przy każdym spotkaniu z Adamem. Ile razy Jacek przejechał przez linię startu, do momentu gdy Adam przeszedł 800 metrów?

2. W prostokącie $ABCD$, w którym $AB = 26$, $AD = 5$, obrano punkt E boku AB taki, że $EB = 14$. Z punktu C poprowadzono prostą prostopadłą do prostej DE i przecinającą ją w punkcie F. Oblicz obwód trójkąta CDF.

3. Każdy bok trójkąta równobocznego o boku 4 podzielono trzema punktami na cztery równe części i narysowano wszystkie odcinki łączące punkty podziału, które są równoległe do boków trójkąta (jak na rysunku). Powstało w ten sposób 16 trójkącików równobocznych o boku 1. Jaką najmniejszą liczbę wierzchołków trójkącików trzeba usunąć, aby każdemu trójkącikowi zabrakło co najmniej jednego wierzchołka?



4. Ustaw w porządku rosnącym liczby: 2^{302}, 3^{85}, 63^{25}, 27^{68}.

5. Znajdź najmniejsze trzy kolejne liczby nieparzyste dodatnie, których suma dzieli się przez 2019.

6. Znajdź ostatnią cyfrę liczby $1^3 + 2^3 + \cdots + 2019^3$.

7. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D leży na przeciwprostokątnej AB. Niech X i Y będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki BC i AC. Jak wybrać punkt D, aby długość odcinka XY była możliwie najmniejsza?

8. Znajdź wszystkie sześciokąty (niekoniecznie wypukłe), w których każdy kąt wewnętrzny jest równy α lub $360° - \alpha$ oraz każdy bok ma długość 1 lub 2.

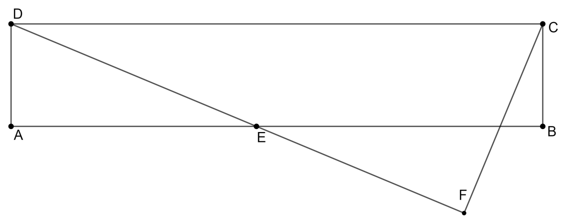
9. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są pięciokrotnie większe od iloczynu swoich cyfr.

10. Rozstrzygnij, czy sześcian można podzielić na 20 sześcianów.

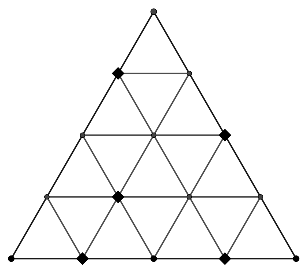
PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła gimnazjalna

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Można zauważyć, że długość bieżni oraz wartości prędkości nie mają wpływu na odpowiedź, ważny jest tylko stosunek prędkości 1/5. Gdy kierunki poruszania się chłopców są zgodne, między kolejnymi spotkaniami Adam przejdzie 1/4 długości bieżni, a tylko 1/6, gdy kierunki nie są zgodne. Wynika z tego, że dystanse, które przebywał Adam między kolejnymi spotkaniami po podzieleniu przez 400 m (oraz ilości przejechania przez Jacka linii startu) wynoszą 1/4 (1 raz), 1/6 (1 raz), 1/4 (1 raz), 1/6 (1 raz), 1/4 (2 razy), 1/6 (1 raz), 1/4 (1 raz), 1/6 (1 raz), 1/4 (1 raz), 1/6 (0 razy, gdyż ostatni dystans skończył się za linią startu, a w czasie jego pokonywania Jacek jechał w przeciwną stronę, zatem nie przekroczył linii startu). Można bezpośrednio policzyć, że Jacek przejechał linię startu 10 razy.
2. Po wykonaniu poprawnego rysunku widzimy, że punkt F znajduje się poza prostokątem $ABCD$, $AE = 12$, a trójkąty AED i FDC są podobne. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED znajdujemy $ED = 13$, co oznacza, że skala podobieństwa wynosi 2. W takim razie $DF = 24$ oraz $FC = 10$, czyli obwód trójkąta CDF jest równy 60.



3. Szukaną liczbą jest 5. Trzeba usunąć wierzchołek z każdego narożnego trójkącika (razem trzy). Zauważmy, że usunięcie dowolnych wierzchołków trójkącików narożnych zostawia cztery trójkąciki środkowe "nienaruszone", a do pozbawienia tych trójkącików po co najmniej jednym wierzchołku nie wystarczy zabranie jednego wierzchołka. To dowodzi, że nie uda nam się wykonać zadania usuwając tylko 4 wierzchołki. Rysunek obok prezentuje rozwiązanie przy usunięciu 5 wierzchołków.



4. Ponieważ
$$63^{25} = 7^{25} \cdot 9^{25} = 7 \cdot 49^{12} \cdot 9^{25} > 3 \cdot 27^{12} \cdot 9^{25} = 3^{87} > 3^{85}$$
$$63^{25} < 64^{25} = 2^{150} < 2^{302}$$
$$2^{302} < 2^{303} = 8^{101} < 9^{101} = 3^{202} < 3^{204} = 27^{68},$$
zatem $3^{85} < 63^{25} < 2^{302} < 27^{68}$.

5. Oznaczając najmniejszą z tych liczb przez $2k + 1$ możemy napisać warunek: 2019 dzieli liczbę $3(2k + 3)$. W takim razie 673 musi dzielić $2k + 3$, a najmniejszą liczbą k o tej własności jest 335. Szukane liczby to $671, 673, 675$.

6. Ponieważ $k^3 + (10n - k)^3$ jest liczbą podzielną przez 10, to liczba $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$ kończy się cyfrą 5. Wynika z tego, że suma trzecich potęg dowolnych kolejnych dziesięciu liczb całkowitych kończy się cyfrą 5. Mamy stąd, że liczba $1^3 + 2^3 + \cdots + 2019^3 = (1^3 + \cdots + 10^3) + (11^3 + \cdots + 20^3) + \cdots + (2011^3 + \cdots + 2020^3) - 2020^3$ ma ostatnią cyfrę taką, jak liczba $202 \cdot 5$, czyli równą zero.

7. Czworokąt $DXCY$ jest prostokątem, zatem $XY = CD$, a długość odcinka CD jest najmniejsza, gdy D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C.

8. Jest sześć takich sześciokątów. Suma kątów w sześciokącie wynosi 720°. Rozważając różne liczby kątów wklęsłych otrzymujemy możliwe kąty (sześciokąty z warunkami na boki):

   - sześć kątów 120° (sześciokąt foremny o boku 1, jedna para przeciwległych boków wydłużona do długości 2, dwie pary przeciwległych boków wydłużone do długości 2, trzy niestykające się boki wydłużone, sześciokąt foremny o boku 2),

   - pięć kątów 90° i jeden 270^o (kwadrat o boku 2 z wyciętym z naroża kwadratem o boku 1).

9. Niech $M = 100a+10b+c = 5abc$ będzie taką liczbą. Łatwo widać, że $c = 5$, zatem $20a+2b+1 = 5ab$, więc $5a(b-4) = 2b+1$. Z podzielności przez 5 wynika, że $b = 2$ (wtedy $a < 0$, sprzeczność) lub $b = 7$ (wtedy $a = 1$). Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest 175.

10. Tak, można. Dzielimy sześcian na sześciany o krawędzi trzy razy krótszej (otrzymujemy ich 27). Następnie 8 z tych sześcianów sklejamy w jeden.