POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Które liczby trzycyfrowe maleją dziewięciokrotnie po starciu pierwszej cyfry?
2. Określ, jakiego znaku jest liczba $25^{16} - 16^{25}$.
3. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że ułamek $\frac{8n+3}{12n+4}$ można skrócić?
4. Uzasadnij, że liczba postaci $k^3 - k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną, nie jest podzielna przez 3.
5. Na każdym polu kratownicy 7×7 siedzi dokładnie jedna mucha. W jednej chwili każda mucha przelatuje na sąsiednie pole (graniczące bokiem). Pokaż, że na pewnym polu nie będzie muchy.
6. Znajdź trzy liczby całkowite takie, że iloczyn każdych dwóch z nich powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.
7. Czy cieniem sześcianu (oświetlonego wiązką równoległych promieni świetlnych) może być sześciokąt, w którym przynajmniej cztery boki są takiej samej długości?
8. Kąt przy wierzchołku C trójkąta ABC jest prosty oraz $AC = 9$ i $BC = 12$. Okrąg jest styczny do dwóch boków trójkąta ABC: do boku BC w A', a do boku AB w C', przy czym $CA' = 2BA'$. Podaj, w jakim stosunku punkt C' dzieli bok AB.
9. W kwadracie $ABCD$ o polu 1 punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są odpowiednio środkami boków CD, DA, AB, BC. Ile wynosi pole czworokąta, którego boki zawierają się w prostych AA_1, BB_1, CC_1, DD_1?
10. Rozstrzygnij, czy można tak pomalować każdy punkt prostej na czarno lub biało, aby punkty odległe o 2 miały taki sam kolor, a punkty odległe o 1 były różnego koloru.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Szukana liczba jest postaci $100a+X$, gdzie a jest niezerową cyfrą, a X – liczbą dwucyfrową. Mamy $100a + X = 9X$, czyli $25a = 2X$. Wynika z tego, że X jest niezerową liczbą podzielną przez 25, zatem X jest jedną z liczb 25, 50, 75, co daje odpowiednio: $a = 2$, $a = 4$ i $a = 6$. Warunki zadania spełniają liczby 225, 450, 675.

2. Rozważana liczba jest ujemna. Rzeczywiście, stosując wzór na różnicę kwadratów, łatwo stwierdzić, że liczby $25^{16} - 16^{25}$, $25^8 - 4^{25}$, $25^4 - 2^{25}$ są jednakowego znaku. Ponieważ $25^4 = 625 \cdot 625$, zaś $2^{25} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^5 = 1024 \cdot 1024 \cdot 32$, to $25^4 - 2^{25} < 0$. W takim razie również $25^{16} - 16^{25} < 0$. Zadanie to można również zrobić dużo prościej: wystarczy zauważyć, że $25^{16} = 5^{32}$, a $16^{25} = 2^{100} = 8^{32} \cdot 2^4$.

3. Nie. Przypuśćmy bowiem, że pewna liczba całkowita $m > 1$ dzieli zarówno licznik $8n + 3$, jak i mianownik $12n + 4$. Wtedy m dzieli również różnicę tych liczb: $(12n + 4) - (8n + 3)$, czyli $4n + 1$. W takim razie m dzieli $2 \cdot (4n + 1)$, a z tego wynika, że dzieli również $(8n + 3) - 2 \cdot (4n + 1)$. Jednak $(8n + 3) - 2 \cdot (4n + 1) = 1$, zatem doszliśmy do wniosku, że m dzieli 1. Stąd $m = 1$, wbrew założeniu.

4. Wystarczy rozważyć wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 3. Jeśli k jest postaci $3n$, to $k^3 - k + 1 = 27n^3 - 3n + 1$ i nie jest podzielne przez 3. Jeśli k jest postaci $3n + 1$, to $k^3 - k + 1 = 27n^3 + 27n^2 + 6n + 1$ i również nie jest podzielne przez 3. Podobnie, gdy k jest postaci $3n + 2$, bo wtedy $k^3 - k + 1 = 27n^3 + 54n^2 + 33n + 7$.

5. Pomalujmy pola na biało i czarno jak szachownicę tak, że w rogach kratownicy będą pola białe. Ponieważ muchy przeleciały na pola o innym kolorze, jedno z białych pól zostało puste, gdyż białych pól jest 25, a czarnych tylko 24.

6. Przykładowe rozwiązanie to $(1, 3, 8)$. Takich trójek jest wiele, na przykład rozwiązaniem jest każda trójka postaci $(n - 1, n + 1, 4n)$.

7. Tak. Postawmy sześcian o podstawie $ABCD$ (drugą podstawę oznaczmy jako $A'B'C'D'$, przy czym AA', BB', CC', DD' są krawędziami bocznymi sześcianu) na podłodze i oświetlmy go wiązką prostopadłą do podłogi. Jeśli uniesiemy sześcian, to na podłodze uzyskamy cień w kształcie kwadratu. Jeżeli teraz obrócimy sześcian względem przekątnej podstawy AC o kąt ostry, cień będzie sześciokątem o czterech bokach równej długości a, gdzie a jest długością cienia krawędzi podstawy AB, i jednej parze równoległych boków równej długości b, gdzie b jest długością cienia krawędzi bocznej AA'.

8. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $AB = 15$. Skoro $CA' = 2BA'$, to $CA' = 8$ i $BA' = 4$. W takim razie $BC' = BA' = 4$, zatem $BC' : C'A = 4 : 11$.

9. Oznaczmy pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej AB_1 przez P. Wtedy pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej AD wynosi $4P$. W takim razie pole każdego z trapezów o ramionach AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 wynosi $3P$. Pole trójkąta AA_1D wynosi $\frac{1}{4}$ oraz $5P$, zatem $P = \frac{1}{20}$. Szukane pole wynosi $1 - 4(P + 3P) = \frac{1}{5}$.

10. Tak, można. Wystarczy przedziały $\langle n, n + 1)$ pomalować na biało dla n parzystego, a na czarno dla n nieparzystego.