POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Czterej kibice ubierali w ciemnej szatni T-shirty. Wiedzieli, że znajdują się tam 4 białe koszulki z godłami Realu Madryt na plecach i 3 białe koszulki z godłami Juventusu Turyn, też na plecach. Wychodzili z szatni gęsiego tak, że każdy z nich widział plecy tylko tych, którzy wyszli przed nim. Oczywiście pierwszy nie widział żadnych pleców. Rozmawiał z nimi reporter tak, że każdy słyszał całą rozmowę. Spytał tego, który wyszedł ostatni, czy wie, jaką ma koszulkę. Odpowiedział, że nie wie. Następnie spytał o to tego, który wyszedł trzeci. Odpowiedź była taka sama. Tak też odpowiedział wychodzący jako drugi. Czy pierwszy wychodzący mógł wywnioskować, jaką miał koszulkę?

2. W trzycyfrowej liczbie podzielnej przez osiem przestawiono pierwszą cyfrę na koniec i otrzymano liczbę podzielną przez 101. Jakie liczby mają taką własność?

3. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym kąt ABC ma miarę $40°$. Oblicz miarę kąta ASC.

4. Na okręgu danych jest 7 punktów. Czy mogą istnieć 3 proste dzielące płaszczyznę na części tak, by we wnętrzu każdej z tych części znajdował się dokładnie jeden z danych punktów?

5. W szesnastokącie foremnym pomalowano 9 wierzchołków na zielono. Czy istnieje trójkąt prostokątny o trzech zielonych wierzchołkach?

6. Ile jest par liczb całkowitych takich, że
$$x^4 + y^4 = 2018?$$

7. Jacek zrobił z drutu 20-kąt foremny i do każdego wierzchołka przyspawał odpowiednio długi prosty drut, tak że punkt przyspawania przypadł w środku drutu. Następnie połączył końce wszystkich przyspawanych drutów, z każdej strony wielokąta osobno, tak, że powstała konstrukcja będąca szkieletem dwóch ostrosłupów złączonych podstawami. Basia zrobiła analogiczną konstrukcję, rozpoczynając od 21-kąta. Każde z nich chce pomalować swoje dzieło, w ten sposób, żeby nie odrywać pędzla od konstrukcji i każdy kawałek drutu między złączeniami malować tylko raz. Dla którego z nich istnieje możliwość takiego pomalowania?

8. Przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe. Pokaż, że $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

9. Liczba naturalna d jest dzielnikiem liczby a. Liczbę d zwiększono o 70%, otrzymując inny dzielnik liczby a. Czy liczba a dzieli się przez 85?

10. Jaś wyjechał rano z domu swoim samochodem i o 19.00 dotarł na miejsce. Jechał z prędkością x kilometrów na godzinę, pokonując 1 kilometr w ciągu x sekund. Podaj prędkość, z jaką jechał Jaś, wyrażoną w metrach na sekundę.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Tak. Czwarty nie widział trzech koszulek Juventusu, trzeci nie widział dwóch, drugi nie widział żadnej koszulki Juventusu.

2. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 101 mają środkową cyfrę równą 0, a skrajne cyfry są sobie równe. Zatem szukana liczba ma identyczne dwie pierwsze cyfry i kończy się zerem. Wśród nich tylko 440 i 880 są liczbami podzielnymi przez 8.

3. Ponieważ proste łączące punkt S z wierzchołkami są dwusiecznymi kątów trójkąta, to $\measuredangle ASC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle BAC + \measuredangle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle ABC) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 110^\circ$.

4. Nie. Załóżmy, że jest to możliwe. Gdyby dwie z tych prostych nie przecinały się wewnątrz okręgu, to wnętrze jednej z części płaszczyzny byłoby rozłączne z okręgiem, więc nie zawierałoby żadnego z danych punktów. Zatem wszystkie 3 punkty przecięć prostych znajdują się wewnątrz okręgu. Oznacza to, że ograniczona część płaszczyzny wyznaczona przez rozważane proste zawiera się wewnątrz okręgu, więc nie zawiera żadnego z danych punktów.

5. Tak. Wśród zielonych wierzchołków są dwa będące końcami średnicy okręgu opisanego na tym wielokącie. Wystarczy dołączyć do nich dowolny zielony wierzchołek.

6. Nie ma takich par. $7^4 = 2401 > 2018$, więc nie trzeba wiele przeglądać. Ponadto ze względu na reszty z dzielenia przez 4 widać, że obie liczby muszą być nieparzyste, a $2 \cdot 5^4$ to mniej niż 2018.

7. Oboje mogą tego dokonać. Konstrukcje te są szkieletami ostrosłupów złączonych podstawami. Należy zacząć od wierzchołka ostrosłupa, malując krawędź boczną, następnie krawędź podstawy, sąsiednią krawędź boczną, krawędź podstawy,..., 19 krawędź boczną (pędzel jest w tym momencie w wierzchołku podstawy, a co druga krawędź podstawy nie jest pomalowana). Teraz Basia maluje dwie ostatnie krawędzie boczne i powtarza analogiczną procedurę na drugim ostrosłupie. Natomiast Jacek od razu "przechodzi na drugi ostrosłup" i wykonuje analogiczne ruchy na drugim ostrosłupie, a na końcu maluje ostatnią krawędź boczną pierwszego ostrosłupa.

8. Jeżeli P jest punktem przecięcia się przekątnych, to $AB^2+CD^2 = AP^2+PB^2+CP^2+PD^2 = AD^2 + BC^2$.

9. Liczba $d' = d + 70\%d = \frac{17}{10}d$ jest całkowita, zatem 10 jest dzielnikiem liczby d, więc także liczby a. Ponadto liczba a jest podzielna przez 17, skoro dzieli się przez $17 \cdot \frac{d}{10}$. W konsekwencji liczba a jest podzielna przez $10 \cdot 17 = 170$, zatem także przez 85.

10. Z treści zadania wynika, iż $\frac{x\,km}{godz.} = \frac{1\,km}{x\,sek.}$, zatem $x^2 = \frac{godz.}{sek.} = 3600$, stąd $x = 60$. Prędkość, z jaką jechał Jaś, to $\frac{1\ km}{60\,sek.} = \frac{50}{3}\frac{m}{sek.}$.