POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Żuraw lecący nad chmurą upuścił łzę, która wytrąciła z niej 17 kropli wody i 23 kryształki lodu. Każda kropla pociągnęła za sobą 18 kropel wody i 21 kryształków lodu, a każdy z kryształków – 19 kropel i 19 kryształków. W czasie dalszego spadania na ziemię każda kropla porwała ze sobą 37 pyłków kurzu i 42 bakterie, a każdy kryształek – 21 pyłków i 13 bakterii. Po uderzeniu o ziemię każda kropla rozpadła się na 14 kropelek, a każdy kryształek na 16 kropelek. Ile cząstek kurzu i ile bakterii spadło na ziemię z powodu łzy żurawia?

2. Liczba naturalna n ma dokładnie 4 różne dzielniki (całkowite dodatnie). Określ, ile dzielników może mieć liczba n^2. Rozważ wszystkie przypadki.

3. W szeregu przy jednej ulicy stoi siedem domków. Trzy z nich są czerwone, trzy z nich są niebieskie, a jeden z nich jest biały. Które z poniższych zdań jest prawdziwe dla dowolnego pomalowania domków?
   (a) Pewne dwa czerwone domy stoją obok siebie.
   (b) Pewien czerwony dom stoi obok niebieskiego domu.
   (c) Jeśli biały dom nie stoi obok niebieskiego domu, to pewne dwa niebieskie domy stoją obok siebie.
   (d) Jeśli biały dom zostanie przemalowany na czerwono, to pewne dwa czerwone domy będą stały obok siebie.
   (e) Przynajmniej jedno z powyższych zdań jest prawdziwe.

4. Z arkusza papieru w kratkę wycięto, tnąc wzdłuż oznaczonych linii, duży kwadrat D. Z kolei z kwadratu D wycięto mniejszy kwadrat M, także tnąc wzdłuż liniatury. Część pozostała z kwadratu D po wycięciu M obejmuje 116 kratek, które są kwadracikami o boku długości pół centymetra. Jaka była długość boku kwadratu D?

5. Czy można sześcian rozciąć płaszczyznami na pięć czworościanów?

6. Pokaż, że liczba $33\ldots3$ (n trójek) jest podzielna przez 99 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez 6.

7. Maszyna do tasowania kart zawsze działa tak samo, przestawiając te karty tak samo w stosunku do początkowego ustawienia. Pewnego dnia do maszyny włożono wszystkie kiery ułożone w kolejności od asa do króla, czyli: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Maszyna potasowała karty i ponownie włożono je do maszyny. Po drugim tasowaniu karty były ustawione w następującej kolejności: 10, 9, Q, 8, K, 3, 4, A, 5, J, 6, 2, 7. W jakiej kolejności karty były po pierwszym tasowaniu, jeśli wiadomo, że po pierwszym tasowaniu as był na drugiej pozycji?

8. Dwa z kątów, na jakie dzielą płaszczyznę proste zawierające wysokości trójkąta, mają miary 70° i 50°. Znajdź miary kątów tego trójkąta.

9. Sklep ze słodyczami zamówił przepyszne praliny: 7 mniejszych torebek i 18 większych. W każdej z mniejszych torebek było tyle samo pralin – podobnie w każdej z większych torebek. Niestety podczas transportu wszystkie torebki się rozerwały i w jednym wielkim pudle walały się 233 praliny. Ile pralin było początkowo w każdej z mniejszych i każdej z większych torebek?

10. Trójkąt wyznaczony przez podstawę trapezu i jego przekątne jest równoboczny. Podstawy trapezu mają długości 1 i 2. Oblicz obwód trapezu.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: gimnazjum

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na ziemię spadło $17 \cdot 18 + 17 + 23 \cdot 19 = 760$ kropel i $17 \cdot 21 + 23 \cdot 19 + 23 = 817$ kryształków. Zatem spadło $760 \cdot 37 + 817 \cdot 21 = 45277$ cząstek kurzu oraz $760 \cdot 42 + 817 \cdot 13 = 42541$ bakterii.

2. Liczba, która ma 4 dzielniki, może być iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych pq, a wtedy $n^2 = p^2q^2$ ma 9 dzielników: $1, p, p^2, q, pq, p^2q, q^2, pq^2, p^2q^2$. Drugą możliwością jest, że n jest trzecią potęgą liczby pierwszej, czyli $n = p^3$, a wtedy $n^2 = p^6$ ma 7 dzielników: $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6$.

3. Zdaniom przeczą następujące przykładowe konfiguracje:

   (a) CNCNCNB

   (b) CCCBNNN

   (c) NCNCNCB

   (d) CNCNCNB

   Zdanie (e) jest prawdziwe, bo jeśli biały domek nie rozdziela czerwonych od niebieskich, to zachodzi (b), a gdy rozdziela, to zachodzi (a).

4. 30 kratek (czyli 15 centymetrów). Oznaczając boki kwadratów przez d i m, otrzymujemy równanie $d^2 - m^2 = 116$, czyli $(d+m)(d-m) = 4 \cdot 29$. Ponieważ liczby $d+m$ i $d-m$ są tej samej parzystości, to obie muszą być parzyste i jedyny możliwy rozkład to: $d + m = 58, d - m = 2$, czyli $d = 30$ i $m = 28$.

5. Tak. Niech $A_1A_2A_3A_4$ będzie podstawą sześcianu, a A_jB_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – jego krawędzią boczną. Wtedy oczekiwane rozcięcie otrzymamy, używając płaszczyzn $A_2A_4B_1$, $A_2B_1B_3$, $A_2A_4B_3$, $A_4B_1B_3$. Innymi słowy, jeśli odetniemy od sześcianu 4 naroża, które nie sąsiadują ze sobą, to w środku pozostanie czworościan (foremny).

6. Załóżmy, że liczba 99 dzieli liczbę $a = 33\ldots3$, wtedy liczba a jest podzielna przez 9. Oznacza to, że suma jej cyfr, równa $3n$, jest podzielna przez 9, czyli liczba n jest podzielna przez 3. Gdyby n było liczbą nieparzystą, to reszta z dzielenia liczby a przez 33 byłaby równa 3 (bo $a - 3 = 33 \cdot 1010\ldots10$), co daje sprzeczność. Zatem n jest liczbą parzystą podzielną przez 3, czyli podzielną przez 6.

   Jeżeli n jest liczbą podzielną przez 6, to $a = 33333300\ldots0 + \cdots + 333333000000 + 333333$ jest liczbą podzielną przez 99, bo $333333 = 99 \cdot 3367$.

7. Poszukiwana kolejność to: 9, A, 4, Q, J, 7, 3, 2, 10, 5, K, 8, 6. Wnioskując z pozycji asa, wiemy, że pierwsza karta jest przestawiana na drugą pozycję, a druga na ósmą. Wobec tego 9 musiała być pierwszą kartą po pierwszym tasowaniu, a to oznacza, że dziewiątą kartą po pierwszym tasowaniu była 10, a dziesiątą 5. I tak dalej – wypełnimy całą kolejność.

   Okazuje się, że informacja o tym, że as był na drugiej pozycji, ułatwia zadanie, ale nie jest konieczna (w każdej innej sytuacji, wnioskując, uzyskamy sprzeczność).

8. Trzeci kąt ma miarę $180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$. Rozważając trójkąty prostokątne wyznaczone przez proste zawierające boki i wysokości rozważanego trójkąta, zauważamy, że trójkąt ten jest rozwartokątny (prostokątny) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z kątów między wysokościami jest rozwarty (prosty). Zatem rozważany trójkąt jest ostrokątny. Łatwo teraz wywnioskować, że każdy z kątów trójkąta jest sumą dwóch dopełnień do 90° kątów: $70^\circ,\ 50^\circ,\ 60^\circ$, czyli sumą dwóch z kątów: $20^\circ,\ 40^\circ,\ 30^\circ$. Szukane kąty to: $70^\circ,\ 50^\circ,\ 60^\circ$.

9. Oznaczmy liczby pralinek w małej i dużej torebce przez x i y. Wiemy, że zachodzi $7x + 18y = 233$ oraz $0 < x < y$. Zatem $18y < 233$ i $25y > 233$, co daje oszacowanie $10 \leqslant y \leqslant 12$. Sprawdzamy wszystkie trzy możliwości i otrzymujemy jedyne całkowite rozwiązanie przy $y = 11, x = 5$.

10. Przede wszystkim należy zauważyć, że trapez jest równoramienny. Wysokość trapezu jest równa $\sqrt{3}/2 + 2\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/2$, zatem kwadrat ramienia wynosi $(3\sqrt{3}/2)^2 + ((2-1)/2)^2 = 7$, a obwód trapezu jest równy $3 + 2\sqrt{7}$.