

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjalny

### FINAŁ

1. Punkt  $S$  leży wewnątrz kąta prostego o wierzchołku  $W$ . Pokaż, że prosta przechodząca przez  $S$  i przecinająca ramiona kąta w punktach  $A$  i  $B$  wycina z tego kąta trójkąt o najmniejszym polu, gdy  $AS = BS$ .
2. Jakimi wielokątami mogą być ściany pięciościanu? Ile poszczególne ściany mogą mieć boków?
3. Liczba  $n$  jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich. Czy wynika stąd, że liczbę  $2n$  można przedstawić jako sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych? A czy zawsze można tak przedstawić liczbę  $3n$ ?
4. Klemens wypisał po kolei wszystkie liczby naturalne  $1, 2, 3, \dots, 1000$ . Po wszystkim otoczył kółeczkiem każdą z cyfr 3 oraz 5. Ile cyfr Klemens otoczył kółeczkiem?
5. Liczbę całkowitą większą od 1 nazwiemy *ocenną*, jeśli wszystkie jej dzielniki pierwsze są równe 2 lub 5. Ile jest liczb ocennych mniejszych od 2019?
6. Liczba całkowita  $a$  dzieli się przez liczbę całkowitą  $d$  oraz przez liczbę całkowitą  $c$  większą o 40% od  $d$ . Przez którą z liczb 5, 7, 10, 14 na pewno jest podzielna liczba  $a$ ?
7. Czy istnieje pięciokąt o bokach długości 1, którego dwa sąsiednie kąty wewnętrzne mają miary  $120^\circ$ ?
8. W prostokącie  $ABCD$  takim, że  $AB = 8$ ,  $BC = 2019$ , obrano punkty  $X, Y$  na boku  $BC$ , punkt  $Z$  na boku  $AB$  i punkt  $T$  na boku  $AD$ . Wiedząc, że  $AT = 7$ ,  $AZ = 6$ ,  $BX = 3$ ,  $BY = 4$  znajdź kąt między prostymi  $XT$  i  $YZ$ .
9. Pokaż, że liczba  $9^{16} - 16^{10}$  jest podzielna przez 245.
10. Znajdź wszystkie pary liczb  $x, y$  całkowitych dodatnich o tej własności, że jeśli do ich sumy dodamy ich iloczyn to otrzymamy 2019.