POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjalny

FINAŁ

1. Punkt S leży wewnątrz kąta prostego o wierzchołku W. Pokaż, że prosta przechodząca przez S i przecinająca ramiona kąta w punktach A i B wycina z tego kąta trójkąt o najmniejszym polu, gdy $AS = BS$.
2. Jakimi wielokątami mogą być ściany pięciościanu? Ile poszczególne ściany mogą mieć boków?
3. Liczba n jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich. Czy wynika stąd, że liczbę $2n$ można przedstawić jako sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych? A czy zawsze można tak przedstawić liczbę $3n$?
4. Klemens wypisał po kolei wszystkie liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Po wszystkim otoczył kółeczkiem każdą z cyfr 3 oraz 5. Ile cyfr Klemens otoczył kółeczkiem?
5. Liczbę całkowitą większą od 1 nazwiemy *ocenną*, jeśli wszystkie jej dzielniki pierwsze są równe 2 lub 5. Ile jest liczb ocennych mniejszych od 2019?
6. Liczba całkowita a dzieli się przez liczbę całkowitą d oraz przez liczbę całkowitą c większą o 40% od d. Przez którą z liczb 5, 7, 10, 14 na pewno jest podzielna liczba a?
7. Czy istnieje pięciokąt o bokach długości 1, którego dwa sąsiednie kąty wewnętrzne mają miary $120°$?
8. W prostokącie $ABCD$ takim, że $AB = 8$, $BC = 2019$, obrano punkty X, Y na boku BC, punkt Z na boku AB i punkt T na boku AD. Wiedząc, że $AT = 7$, $AZ = 6$, $BX = 3$, $BY = 4$ znajdź kąt między prostymi XT i YZ.
9. Pokaż, że liczba $9^{16} - 16^{10}$ jest podzielna przez 245.
10. Znajdź wszystkie pary liczb x, y całkowitych dodatnich o tej własności, że jeśli do ich sumy dodamy ich iloczyn to otrzymamy 2019.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła gimnazjalna

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Załóżmy, że $AS = BS$ i narysujmy inną prostą przechodzącą przez S i przecinającą półproste WA i WB odpowiednio w punktach X i Y. Załóżmy, że $WX < WA$, wtedy $WY > WB$ oraz kąty AXS, YBS są rozwarte. Ponieważ w trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciw największego kąta, to $XS < AS = BS < YS$. W takim razie na boku SY możemy obrać taki punkt Z, że $SZ = SX$ i wtedy trójkąty ASX i BSZ są przystające. Zatem pole trójkąta ASX jest równe polu trójkąta BSZ, które jest mniejsze od pola trójkąta BSY. Czyli pole trójkąta ABW jest mniejsze od pola trójkąta XYW. Analogicznie otrzymamy taki sam wniosek, gdy $WX > WA$, co kończy dowód.

2. Ściany pięciościanu mogą mieć 3 lub 4 boki. Gdyby jedna ze ścian miała 5 boków, to sąsiadowałaby z co najmniej 5 różnymi ścianami co oznaczałoby, że nasza bryła ma więcej niż 5 ścian. Jeżeli z pewnego wierzchołka W pięciościanu wychodzą cztery krawędzie, to W jest wierzchołkiem czterech ścian. Na każdej z tych krawędzi znajduje się wierzchołek pięciościanu inny niż W, są one także wierzchołkami piątej ściany. Mamy więc w tej sytuacji 4 ściany trójkątne i jedną czworokątną.

   Załóżmy, że z każdego wierzchołka pięciościanu wychodzi mniej niż cztery krawędzie, zatem jest ich dokładnie trzy. Łatwo widać, że w tym przypadku będziemy mieli dwie ściany trójkątne i trzy czworokątne.

3. Jeżeli $n = a^2+b^2$, to $2n = (a+b)^2+(a-b)^2$. Natomiast $5 = 1^2+2^2$, ale 15 nie da się przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Uwaga: aby zadanie było rozwiązane musi pojawić się poprawna odpowiedź na oba pytania!

4. W każdej setce występuje 20 cyfr 3: 10 z nich jako cyfra dziesiątek, 10 jako cyfra jedności. Setek jest 10 więc na pozycjach dziesiątek i jedności cyfra 3 wystąpi 200 razy. Podobnie z cyfrą 5. Z kolei 100 razy cyfra 3 pojawi się jako cyfra setek. Cyfra 3 wystąpi więc 300 razy, podobnie cyfra 5. Klemens otoczył kółkiem 600 cyfr.

5. Wszystkie liczby ocenne są postaci 2^i5^k, gdzie i, k są całkowitymi liczbami nieujemnymi, przy czym i oraz k nie mogą być jednocześnie zerem. Zatem należy policzyć ilość rozwiązań nierówności $2^i5^k < 2019$. Dla $k = 0$ mamy $2^i < 2019$, zatem $0 < i \leqslant 10$. Dla $k = 1$ otrzymamy $i \leqslant 8$, dla $k = 2$ jest $i \leqslant 6$, dla $k = 3$ otrzymujemy $i \leqslant 4$, a dla $k = 4$ mamy $i \leqslant 1$. Nie ma rozwiązań takich, że $k > 4$, bo $5^5 > 2019$. Zatem ilość nieujemnych rozwiązań rozważanej nierówności wynosi $10 + 9 + 7 + 5 + 2 = 33$.

6. Ponieważ $140\%d$ jest liczbą całkowitą, to d (a zatem także a) jest podzielne przez 5. Ponadto a jest podzielne przez $\frac{7d}{5}$, więc jest podzielne przez 7. Liczba a nie musi być podzielna przez 2 (np. $d = 5,\ a = 35$), więc także przez 10 lub 14.

7. Taki pięciokąt nie istnieje. Przypuśćmy, że $ABCDE$ byłby takim pięciokątem, przy czym miary kątów przy wierzchołkach A i B wynoszą $120°$. Wtedy E, A, B, C są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, więc $EC = 2$. Ale wtedy D leżałby na prostej EC, czyli $ABCDE$ byłby tak naprawdę czworokątem.

8. Przesuńmy odcinek XT równolegle tak, aby punkt X trafił na punkt B. Wtedy T przekształci się na punkt T' boku AD oraz $AT' = 7 - 3 = 4$. Ponieważ $AB/AT' = 2 = BY/BZ$, to trójkąty prostokątne ABT' i BZY są podobne. Z tego łatwo wynika, że prosta ZY jest prostopadła do prostej BT', zatem także do prostej XT.

9. Zauważmy, że $9^{16} - 16^{10} = 3^{32} - 2^{40} = (3^{16} + 2^{20})(3^8 + 2^{10})(3^4 + 2^5)(3^4 - 2^5)$. Ponieważ $3^4 - 2^5 = 49$ oraz $245 = 49 \cdot 5$, wystarczy pokazać podzielność rozważanej liczby przez 5. Można to zrobić rozważając ostatnie cyfry liczb 9^{16} (cyfra jedności to 1) i 16^{10} (cyfra jedności to 6).

10. Zauważmy, że
$$xy + x + y + 1 = 2020,$$
$$(x + 1)(y + 1) = 2020.$$
Załóżmy, że $x \leqslant y$. Oczywiście $x + 1 \geqslant 2$. Liczbę 2020 możemy zapisać jako iloczyn dwóch liczb (gdzie pierwsza z liczb jest nie większa od drugiej) na następujące sposoby: $2 \cdot 1010$, $4 \cdot 505$, $5 \cdot 404$, $10 \cdot 202$ oraz $20 \cdot 101$. Mamy więc następujące rozwiązania (x, y): $(1, 1009)$, $(3, 504)$, $(4, 405)$, $(9, 201)$, $(19, 100)$, $(100, 19)$, $(201, 9)$, $(405, 4)$, $(504, 3)$ oraz $(1009, 1)$.