

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. W trapezie $ABCD$ punkt K leży na podstawie AB , punkt L leży na podstawie CD , punkt P jest punktem przecięcia odcinków AL i DK , zaś punkt Q jest punktem przecięcia odcinków BL i CK . Pokaż, że pole czworokąta $KQLP$ jest równe sumie pól trójkątów APD i BCQ .
2. W czworobocianie foremny o boku długości 1 wybrano dwie krawędzie, które nie mają żadnego wspólnego punktu. Znajdź odległość środków tych krawędzi.
3. Wiadomo, że liczby $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ oraz $a - b$ są wymierne. Pokaż, że liczby a i b są wymierne.
4. W pierwszym pudełku jest 55 cukierków, a w drugim 66 cukierków. Możliwy jest następujący „ruch”: Adaś wybiera jedno z pudełek i wkłada do niego cukierka, następnie Basia wybiera pudełko i wkłada do niego dwa cukierki, potem Jacek wkłada trzy cukierki do jednego z pudełek. Takie „ruchy” mogą być powtarzane wielokrotnie. Czy Adaś, Basia i Jacek mogą tak umówić się na wybór pudełek, aby po pewnej liczbie ruchów w pierwszym pudełku znajdowało się 2018 cukierków, a w drugim 2019 cukierków ?
5. Ile wynosi suma wszystkich palindromicznych liczb trzycyfrowych? Liczby palindromiczne to takie, których zapis dziesiętny czytany od strony lewej i od strony prawej daje tę samą wartość.
6. Niech $n \geq 20$ będzie liczbą całkowitą. Pokaż, że jeżeli suma dwóch największych dzielników liczby n jest równa sumie dwóch najmniejszych dzielników podniesionej do trzeciej potęgi, to n można przedstawić jako iloczyn pięciu liczb całkowitych większych od 1 (niekoniecznie różnych).
7. Czy istnieje trójkąt ostrokątny, w którym jeden z kątów jest dzielony przez wychodzącą z jego wierzchołka wysokość w stosunku 1 : 2, a pozostałe dwa kąty dzielone są przez wychodzące z nich wysokości w stosunku 1 : 3?
8. Punkt znajduje się wewnątrz kąta 1° w odległości 1m od wierzchołka i porusza się z prędkością 1m/s równoległe do jednego z ramion zbliżając się do wierzchołka. Gdy punkt ten dolatuje do dowolnego z ramion, odbija się od niego zgodnie z fizyczną zasadą „kąta padania równa się kątowi odbicia”. Czy punkt ten doleci do wierzchołka w czasie krótszym niż 10 sekund?
9. Adam wybrał liczbę całkowitą dodatnią m , następnie wybrał jej dzielnik, pomnożył go przez 3 i dodał do m . W ten sposób otrzymał liczbę 2019. Jakie liczby wybrał Adam?
10. W kwadracie o boku długości 4 zaznaczono 17 punktów. Udowodnij, że wśród zaznaczonych istnieją punkty, których odległość jest mniejsza niż $\frac{3}{2}$.