POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: gimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. W trapezie $ABCD$ punkt K leży na podstawie AB, punkt L leży na podstawie CD, punkt P jest punktem przecięcia odcinków AL i DK, zaś punkt Q jest punktem przecięcia odcinków BL i CK. Pokaż, że pole czworokąta $KQLP$ jest równe sumie pól trójkątów APD i BCQ.

2. W czworościanie foremnym o boku długości 1 wybrano dwie krawędzie, które nie mają żadnego wspólnego punktu. Znajdź odległość środków tych krawędzi.

3. Wiadomo, że liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ oraz $a-b$ są wymierne. Pokaż, że liczby a i b są wymierne.

4. W pierwszym pudełku jest 55 cukierków, a w drugim 66 cukierków. Możliwy jest następujący „ruch": Adaś wybiera jedno z pudełek i wkłada do niego cukierka, następnie Basia wybiera pudełko i wkłada do niego dwa cukierki, potem Jacek wkłada trzy cukierki do jednego z pudełek. Takie "ruchy" mogą być powtarzane wielokrotnie. Czy Adaś, Basia i Jacek mogą tak umówić się na wybór pudełek, aby po pewnej liczbie ruchów w pierwszym pudełku znajdowało się 2018 cukierków, a w drugim 2019 cukierków ?

5. Ile wynosi suma wszystkich palindromicznych liczb trzycyfrowych? Liczby palindromiczne to takie, których zapis dziesiętny czytany od strony lewej i od strony prawej daje tę samą wartość.

6. Niech $n \geqslant 20$ będzie liczbą całkowitą. Pokaż, że jeżeli suma dwóch największych dzielników liczby n jest równa sumie dwóch najmniejszych dzielników podniesionej do trzeciej potęgi, to n można przedstawić jako iloczyn pięciu liczb całkowitych większych od 1 (niekoniecznie różnych).

7. Czy istnieje trójkąt ostrokątny, w którym jeden z kątów jest dzielony przez wychodząca z jego wierzchołka wysokość w stosunku $1:2$, a pozostałe dwa kąty dzielone są przez wychodzące z nich wysokości w stosunku $1:3$?

8. Punkt znajduje się wewnątrz kąta 1° w odległości 1m od wierzchołka i porusza się z prędkością 1m/s równolegle do jednego z ramion zbliżając się do wierzchołka. Gdy punkt ten dolatuje do dowolnego z ramion, odbija się od niego zgodnie z fizyczną zasadą "kąt padania równa się kątowi odbicia". Czy punkt ten doleci do wierzchołka w czasie krótszym niż 10 sekund?

9. Adam wybrał liczbę całkowitą dodatnią m, następnie wybrał jej dzielnik, pomnożył go przez 3 i dodał do m. W ten sposób otrzymał liczbę 2019. Jakie liczby wybrał Adam?

10. W kwadracie o boku długości 4 zaznaczono 17 punktów. Udowodnij, że wśród zaznaczonych istnieją punkty, których odległość jest mniejsza niż $\frac{3}{2}$.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła gimnazjalna

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Odcinek KL dzieli trapez $ABCD$ na dwa trapezy: $AKLD$ i $KBCL$. W trapezie $AKLD$ odcinki AL i DK są przekątnymi, zatem $P_{APD} = P_{KLP}$. Podobnie $P_{KQL} = P_{BCP}$. W takim razie

$$P_{KQLP} = P_{KLP} + P_{KQL} = P_{APD} + P_{BCP},$$

co należało pokazać.

2. Oznaczmy wierzchołki czworościanu jako A, B, C i D. Wybierzmy krawędzie AB oraz CD. Środek krawędzi AB oznaczmy literą K, zaś środek CD literą L. Szukamy długości odcinka KL. Zauważmy, że trójkąt CKD jest trójkątem równoramiennym, w którym $|CK| = |DK| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ zaś $CD = 1$. Oczywiście KL jest wysokością tego trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|KL|^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

co oznacza $|KL| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Jeżeli $a = b = 0$, to teza jest spełniona. W przeciwnym przypadku mamy $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$, zatem liczba $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jest wymierna. Wynika z tego łatwo wymierność liczb $\sqrt{a}, \sqrt{b}$, więc także liczb a, b. Jeżeli nie rozpatrzono przypadku $a = b = 0$, to odejmujemy dwa punkty.

4. Nie. Jeżeli rozważamy reszty z dzielenia przez 3 sumy liczby cukierków w pudełkach, to na początku wynosiła ona 1 i po każdym "ruchu" znów 1, zatem nie może wynieść 2, a reszta z dzielenia $2018 + 2019$ przez 3 właśnie tyle wynosi.

5. Jest to

$$\sum_{a=1}^{9}\sum_{b=0}^{9}(100a + 10b + a) = \sum_{a=1}^{9}(1010a + 450) = 45 \cdot 1010 + 9 \cdot 450 = 49500.$$

6. Zadanie niestety ma feler – wbrew intencjom autorów takiej liczby nie ma... Niech 1 i p będą najmniejszymi dzielnikami liczby n, wtedy p jest liczbą pierwszą oraz n i n/p są największymi dzielnikami. Mamy $(1+p)^3 = n + \frac{n}{p}$, skąd $n = p(p+1)^2$. Ponieważ $n \geqslant 20$, to $p > 2$, zatem $p+1$ jest liczbą parzystą. Oznacza to, że liczba n jest podzielna przez 2, czyli najmniejszy różny od 1 dzielnik jest równy $p = 2$. A to oznacza, że takiej liczby nie ma.

   Uwaga: w oryginale było tu niepoprawne "rozwiązanie", którego się wstydzimy i dlatego już go tu nie ma.

7. Jeśli jeden kąt jest dzielony przez opuszczoną z jego wierzchołka wysokość na kąty α i 2α, to pozostałe dwa kąty trójkąta mają miary $90°–\alpha$ i $90°–2\alpha$, natomiast wysokości poprowadzone z ich wierzchołków odetną z jednej strony kąty $90°–3\alpha$. Musiałoby to zatem być 1/4 większego z nich (czyli $90°–\alpha$) i jednocześnie 3/4 mniejszego (czyli $90°–2\alpha$). Oznacza to, że jednocześnie muszą być spełnione dwa równania: $\frac{3}{4}(90° - 2\alpha) = 90°–3\alpha$ oraz $\frac{1}{4}(90° - \alpha) = 90°–3\alpha$. Równania te są sprzeczne. Stąd, trójkąt opisany w zadaniu nie istnieje.

8. W każdym odbiciu kąt padania jest o $1°$ większy niż w poprzednim. Ponieważ kąt padania przy pierwszym odbiciu ma miarę $1°$, to 90-te odbicie będzie pod kątem prostym i punkt zacznie wracać po tej samej trajektorii. Punkt ten nigdy nie doleci do wierzchołka.

9. Oznaczmy przez x dzielnik liczby m wybrany przez Adama. Wtedy istnieje $k \geqslant 1$ takie, że $m = kx$. Ponadto z warunków zadania wynika, że $3x + kx = 2019$, więc $x(k+3) = 3 \cdot 673$. Ponieważ 673 jest liczbą pierwszą, to $k + 3 = 2019$ (wtedy $k = 2016$ i $x = 1$) lub $k + 3 = 673$, skąd $k = 670,\ x = 3,\ m = 2010$. Adam wybrał więc liczby 2016 **i** 1 lub 2010 **oraz** 3.

10. Kwadrat można podzielić na 16 kwadracików o boku 1. W jednym z tych kwadratów muszą znaleźć się przynajmniej 2 punkty – wówczas ich odległość nie przekracza liczby $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.