

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są czterokrotnie większe od iloczynu swoich cyfr.
2. Ostrosłup prawidłowy o podstawie 2018-kątnej przecięto płaszczyzną i otrzymano wielokąt. Ile boków może mieć ten wielokąt?
3. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór rozwiązań nierówności $mx^2 - 2x \geq 0$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 3 > 0$.
4. W czworościanie $ABCD$ mamy $\angle ABD = \angle ACB = 90^\circ$. Pokaż, że kąt ADC nie jest prosty.
5. Określ, czy równanie $3^x + 4^y + 8^z = 2019$ posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych nieujemnych.
6. Udowodnij, że liczba $p\sqrt{2} + q\sqrt{3}$ jest niewymierna dla dowolnych wymiernych i niezerowych liczb p, q .
7. Czy istnieją trzy różne liczby takie, że można je ustawić (niekoniecznie w tej samej kolejności!) zarówno w ciąg arytmetyczny jak i geometryczny?
8. Na przyprostokątnej AB oraz przeciwprostokątnej CB trójkąta prostokątnego ABC rozważamy ciągi punktów, odpowiednio: A_0, A_1, A_2, \dots oraz C_0, C_1, C_2, \dots takie, że $A_0 = A$, $C_0 = C$, odcinki $C_j A_j$ są prostopadłe do AB , a odcinki $A_j C_{j+1}$ są prostopadłe do BC dla $j = 0, 1, 2, \dots$. Łamana $C_0 A_0 C_1 A_1 C_2 A_2 \dots$ dzieli trójkąt ABC na dwie części. Znajdź stosunek pól tych części, jeśli wiadomo, że $AB = 4$ oraz $AC = 3$.
9. Znajdź równanie linii będącej zbiorem środków wszystkich okręgów, które są jednocześnie zewnętrznie styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ oraz styczne do osi OX . Naskicuj jej wykres.
10. Dany jest punkt wewnętrzny P trójkąta ostrokątnego ABC . Niech punkty $X \in AB$, $Y \in BC$, $Z \in CA$ będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki trójkąta. Pokaż, że $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = XB^2 + YC^2 + ZA^2$.