POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ

1. Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które są czterokrotnie większe od iloczynu swoich cyfr.

2. Ostrosłup prawidłowy o podstawie 2018-kątnej przecięto płaszczyzną i otrzymano wielokąt. Ile boków może mieć ten wielokąt?

3. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór rozwiązań nierówności $mx^2 - 2x \geqslant 0$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 3 > 0$.

4. W czworościanie $ABCD$ mamy $\angle ABD = \angle ACB = 90°$. Pokaż, że kąt ADC nie jest prosty.

5. Określ, czy równanie $3^x + 4^y + 8^z = 2019$ posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych nieujemnych.

6. Udowodnij, że liczba $p\sqrt{2} + q\sqrt{3}$ jest niewymierna dla dowolnych wymiernych i niezerowych liczb p, q.

7. Czy istnieją trzy różne liczby takie, że można je ustawić (niekoniecznie w tej samej kolejności!) zarówno w ciąg arytmetyczny jak i geometryczny?

8. Na przyprostokątnej AB oraz przeciwprostokątnej CB trójkąta prostokątnego ABC rozważamy ciągi punktów, odpowiednio: $A_0, A_1, A_2, \ldots$ oraz $C_0, C_1, C_2, \ldots$ takie, że $A_0 = A$, $C_0 = C$, odcinki C_jA_j są prostopadłe do AB, a odcinki A_jC_{j+1} są prostopadłe do BC dla $j = 0, 1, 2, \ldots$. Łamana $C_0A_0C_1A_1C_2A_2\ldots$ dzieli trójkąt ABC na dwie części. Znajdź stosunek pól tych części, jeśli wiadomo, że $AB = 4$ oraz $AC = 3$.

9. Znajdź równanie linii będącej zbiorem środków wszystkich okręgów, które są jednocześnie zewnętrznie styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ oraz styczne do osi OX. Naszkicuj jej wykres.

10. Dany jest punkt wewnętrzny P trójkąta ostrokątnego ABC. Niech punkty $X \in AB$, $Y \in BC$, $Z \in CA$ będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki trójkąta. Pokaż, że $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = XB^2 + YC^2 + ZA^2$.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

ĆWIERĆFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech $\overline{abc}$ będzie taką liczbą, że $100a + 10b + c = 4abc$. Oczywiście c musi być parzyste i różne od zera. Co więcej, mamy $100a < 4abc$, zatem $bc > 25$, a to oznacza, że $c > 2$. W takim razie $c = 4$, $c = 6$ lub $c = 8$. Jeśli $c = 4$, to rozważana zależność redukuje się do $50a + 5b + 2 = 8ab$ i warunku $b > 25/4$. Widzimy też, że b musi być parzyste, co pozostawia tylko jedną możliwość: $b = 8$. Po wstawieniu otrzymujemy $a = 3$. Dla $c = 6$ oraz $c = 8$ przeprowadzamy analogiczne rozumowanie, jednak te przypadki nie dają żadnych rozwiązań. Ostatecznie, jest tylko jedna liczba o żądanej własności: 384.

2. Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez wierzchołek ostrosłupa, to przecięciem jest trójkąt. Załóżmy, że płaszczyzna nie zawiera wierzchołka ostrosłupa. Jeżeli płaszczyzna przecina podstawę ostrosłupa w co najwyżej jednym punkcie, to przecięcie ma 2018 boków. Załóżmy teraz, że płaszczyzna przecina brzeg podstawy ostrosłupa dokładnie w dwóch punktach: A i B. Wtedy płaszczyzna przecina k krawędzi bocznych ostrosłupa, gdzie k jest liczbą wierzchołków podstawy pomiędzy punktami A i B, oraz dwie krawędzie podstawy – zatem przecięcie ma $k + 2$ boki (k może przyjmować wartości od 1 do 2017). Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez krawędź podstawy, ale nie przez wierzchołek, to przecięcie jest 2018-kątem. Podsumowując, liczbą boków przecięcia może być dowolna z liczb: $3, 4, \ldots, 2019$.

3. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 3 > 0$ jest zbiór $A = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Jeśli $m = 0$, to nierówność $mx^2 - 2x \geqslant 0$ redukuje się do $-2x \geqslant 0$ i jej zbiorem rozwiązań jest $(-\infty, 0]$, zatem $m = 0$ spełnia warunki zadania. Załóżmy zatem, że $m \neq 0$. Wówczas badaną nierówność możemy zapisać jako nierówność $x(mx - 2) \geqslant 0$, której zbiorem rozwiązań jest albo $B_+ = (-\infty, 0] \cup [2/m, \infty)$ dla $m > 0$, albo $B_- = [2/m, 0]$ dla $m < 0$. Oczywiście, B_- zawiera się w A. Natomiast warunek $B_+ \subset A$ jest równoważny $\frac{2}{m} > 3$ (oraz $m > 0$), czyli $m \in (0, 2/3)$. Ostatecznie, $m \in (-\infty, 2/3)$.

4. Załóżmy, że $\angle ADC = 90°$, wtedy $AD^2 = AB^2 + BD^2$, $AB^2 = BC^2 + CA^2$, $AC^2 = AD^2 + DC^2$. Po dodaniu tych równości stronami otrzymamy sprzeczność.

5. Przede wszystkim zauważmy, że musi zachodzić $z \leqslant 3$ oraz $y \leqslant 5$. Jeżeli $x = 0$, to $4^y + 8^z = 2018$. Ponieważ 2018 nie jest liczbą podzielną przez 4, równanie to nie ma rozwiązań. Zatem $x > 0$. Rozważając podzielność przez 3, wnioskujemy, że z jest liczbą nieparzystą, czyli $z = 1$ lub $z = 3$, więc rozważane równanie jest równoważne alternatywie równań: $3^x + 4^y = 2011$ (dla $z = 1$) lub $3^x + 4^y = 1507$ (dla $z = 3$). Ponieważ w każdym z dwóch przypadków mamy do sprawdzenia jedynie możliwości $y = 1, 2, 3, 4, 5$, widzimy, że żadna z liczb $2011 - 4^y$ oraz $1507 - 4^y$ nie jest potęgą trójki. Wynika stąd, że rozważane równanie nie posiada rozwiązań.

6. Załóżmy, że liczba $r = p\sqrt{2} + q\sqrt{3}$ jest wymierna, wtedy $3q^2 = (r - p\sqrt{2})^2 = r^2 + 2p^2 - 2pr\sqrt{2}$, co oznacza, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Sprzeczność daje tezę.

7. Tak. Oto przykładowy sposób znalezienia takich liczb: niech będą to liczby $a-r, a, a+r$ dla pewnego $r \neq 0$. Ciąg $a, a-r, a+r$ jest geometryczny, jeśli $a(a+r) = (a-r)^2$, co oznacza $r = 3a$. Sprawdzamy bezpośrednio, że ciąg $-2a, a, 4a$ jest arytmetyczny, a ciąg $a, -2a, 4a$ – geometryczny. i jeśli tylko $a \neq 0$, to liczby $-2a, a, 4a$ są różne.

8. Po narysowaniu odcinków wymienionych w treści zadania łatwo zauważyć, że wszystkie powstałe trójkąty są podobne do ABC. Stąd wniosek, że szukany stosunek to stosunek pól trójkątów ACC_1 i AC_1A_1. Ponieważ stosunek podobieństwa tych trójkątów wynosi $AC/AC_1 = BC/AB$, to szukany stosunek pól jest równy $BC^2/AB^2 = 25/16$.

9. Okrąg podany w treści zadania ma środek w punkcie $(0, 2)$ i promień 1. Szukane punkty (x, y) spełniają równanie $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = 1 + y$ oraz nierówność $y > 0$. Po przekształceniach otrzymujemy równanie paraboli $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}$.

10. Z twierdzenia Pitagorasa dla odpowiednich trójkątów otrzymamy równości $PZ^2 + ZA^2 = AX^2 + XP^2$, $PX^2 + XB^2 = BY^2 + YP^2$, $PY^2 + YC^2 = CZ^2 + ZP^2$. Po dodaniu ich stronami otrzymamy tezę.