

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Oznaczmy przez n liczbę $2018^2 + 2019^2$. Przedstaw liczbę $2n$ jako sumę kwadratów dwóch liczb naturalnych.
2. Dodatkowo liczby rzeczywiste x, y, z, t spełniają związki: $xyz = t^3$, $y^3 + z^3 + t^3 = 3x^3$, $z^6 + t^6 + x^6 = 3y^6$. Pokaż, że $x = y = z = t$.
3. W trójkącie ostrokątnym ABC długości boków spełniają zależność $AB + AC = 2BC$. Pokaż, że wtedy $AB - AC = \frac{BD - DC}{2}$, gdzie D jest spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka A .
4. Siedmiu krasnoludków ma swoje chatki wzdłuż jednej prostej ścieżki. W którym miejscu przy ścieżce powinna zbudować swoją chatkę Śnieżka, aby suma długości dróg przebytych przez krasnoludki do jej domu była najmniejsza?
5. Rozwiąż równanie $x^2 = [x] + 5$ (gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , czyli największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x).
6. Dwie środkowe trójkąta zawarte są w prostych $5x + 4y = 0$ oraz $3x - y = 0$. Wiedząc, że $A = (-5, 2)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta, znajdź pozostałe wierzchołki.
7. Czy cieniem sześcianu (oświetlonego wiązką równoległych promieni świetlnych) może być sześciokąt o bokach równej długości?
8. Iloczyn cyfr pewnej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 3 równa się 3^{100} . Pokaż, że suma cyfr tej liczby jest większa od 300.
9. Pan Mieczysław jest hodowcą koni wyścigowych i bardzo często wysyła 3 swoje konie na różne zawody. Podczas wszystkich wyścigów poziom jest bardzo wyrównany i każda kolejność, w jakiej konie zjawiają się na mecie, jest jednakowo prawdopodobna. Ile najwięcej koni może brać udział w wyścigu, by prawdopodobieństwo, że konie pana Mieczysława zajmą pierwsze dwa miejsca, wynosiło nie mniej niż $\frac{2}{10}$?
10. Na czas remontu torowiska o długości 204 km zmieniono rozkład jazdy pociągów. Podczas remontu pociągi jeżdżą będą po całej tej trasie ze średnią prędkością mniejszą o 17 km/h, co wydłuży czas jazdy o dwie godziny. Jaka jest średnia prędkość pociągu przed zmianą rozkładu jazdy?