POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I

1. Oznaczmy przez n liczbę $2018^2 + 2019^2$. Przedstaw liczbę $2n$ jako sumę kwadratów dwóch liczb naturalnych.

2. Dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z, t spełniają związki: $xyz = t^3$, $y^3 + z^3 + t^3 = 3x^3$, $z^6 + t^6 + x^6 = 3y^6$. Pokaż, że $x = y = z = t$.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC długości boków spełniają zależność $AB + AC = 2BC$. Pokaż, że wtedy $AB - AC = \frac{BD-DC}{2}$, gdzie D jest spodkiem wysokości wychodzącej z wierzchołka A.

4. Siedmiu krasnoludków ma swoje chatki wzdłuż jednej prostej ścieżki. W którym miejscu przy ścieżce powinna zbudować swoją chatkę Śnieżka, aby suma długości dróg przebytych przez krasnoludki do jej domu była najmniejsza?

5. Rozwiąż równanie $x^2 = [x]+5$ (gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x).

6. Dwie środkowe trójkąta zawarte są w prostych $5x + 4y = 0$ oraz $3x - y = 0$. Wiedząc, że $A = (-5, 2)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta, znajdź pozostałe wierzchołki.

7. Czy cieniem sześcianu (oświetlonego wiązką równoległych promieni świetlnych) może być sześciokąt o bokach równej długości?

8. Iloczyn cyfr pewnej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 3 równa się 3^{100}. Pokaż, że suma cyfr tej liczby jest większa od 300.

9. Pan Mieczysław jest hodowcą koni wyścigowych i bardzo często wysyła 3 swoje konie na różne zawody. Podczas wszystkich wyścigów poziom jest bardzo wyrównany i każda kolejność, w jakiej konie zjawią się na mecie, jest jednakowo prawdopodobna. Ile najwięcej koni może brać udział w wyścigu, by prawdopodobieństwo, że konie pana Mieczysława zajmą pierwsze dwa miejsca, wynosiło nie mniej niż $\frac{2}{10}$?

10. Na czas remontu torowiska o długości 204 km zmieniono rozkład jazdy pociągów. Podczas remontu pociągi jeździć będą po całej tej trasie ze średnią prędkością mniejszą o 17 km/h, co wydłuży czas jazdy o dwie godziny. Jaka jest średnia prędkość pociągu przed zmianą rozkładu jazdy?

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi
$$2\Big(k^2+(k+1)^2\Big)=(2k+1)^2+1.$$
Zatem $2\Big(2018^2+2019^2\Big)=4037^2+1^2$.

2. Przypuśćmy, że nie jest prawdą, iż $x=y=z=t$. Jeżeli liczby te nie są wszystkie równe, to żadna z liczb t, x, y nie może być ani najmniejszą, ani największą wśród danych liczb, co wynika odpowiednio z pierwszej, drugiej i trzeciej równości podanej w zadaniu. Zatem z jest największą i najmniejszą spośród nich, co jest sprzeczne z założeniem, że liczby te nie są wszystkie równe.

3. Ponieważ ABC jest trójkątem ostrokątnym, to wysokość AD leży wewnątrz trójkąta oraz zachodzi $AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-DC^2$, czyli $AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$, co daje $(AB+AC)(AB-AC)=BC(BD-DC)$. Uwzględniając warunek $AB+AC=2BC$ otrzymujemy tezę.

4. Wyobraźmy sobie ścieżkę jako prostą, a kolejne domki jako punkty A, B, C, D, E, F, G na tej prostej. Jeżeli punkt X leży na odcinku CE, to suma jego odległości od punktów A, B, C, E, F, G nie zależy od jego położenia, zatem suma odległości od wszystkich punktów jest najmniejsza dla $X=D$. Jeżeli punkt X leży na odcinku BF, ale poza odcinkiem CE, to $CX+XE>CE$. Stąd łatwy wniosek, że rozważana suma odległości jest większa niż w poprzednim przypadku. Analogicznie rozważamy sytuację, gdy $X\in AG\setminus BF$. Śnieżka powinna wybudować swój domek naprzeciw domku "środkowego" krasnoludka D.

5. Z definicji $[x]$ wynika, że $x-1<[x]\leqslant x$. W takim razie $x+4<[x]+5\leqslant x+5$, czyli $x+4<x^2\leqslant x+5$. Po rozwiązaniu tej podwójnej nierówności otrzymujemy $x\in\left\langle\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle$. Jeśli $x\in\left\langle\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$, to $[x]=-2$, zatem równanie dane w zadaniu sprowadza się do $x^2=3$, które ma jedno rozwiązanie w rozważanym przedziale: $x=-\sqrt{3}$. Jeśli zaś $x\in\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\rangle$, to $[x]=2$ i otrzymujemy równanie $x^2=7$, które również ma jedno rozwiązanie w rozważanym przedziale: $x=\sqrt{7}$. Ostatecznie, badane równanie ma dwa rozwiązania: $x=-\sqrt{3}$ oraz $x=\sqrt{7}$.

6. Punktem przecięcia się środkowych jest $S=(0,0)$. Oznaczmy koniec środkowej wychodzącej z wierzchołka A przez A'. Z twierdzenia o środkowych wiemy, że wektor SA' jest równy połowie wektora AS, zatem $A'=(5/2,-1)$. Prosta BC ma więc równanie $y=m(x-5/2)-1$, gdzie m jest nieznanym współczynnikiem kierunkowym (różnym od 3 i $-5/4$). Licząc współrzędne punktu B jako punktu wspólnego prostej BC i prostej $5x+4y=0$, otrzymujemy $B=\left(\frac{10m+4}{4m+5},\frac{-25m-10}{8m+10}\right)$. Licząc współrzędne punktu C jako punktu wspólnego prostej BC i prostej $3x-y=0$, otrzymujemy $C=\left(\frac{5m+2}{2m-6},\frac{15m+6}{2m-6}\right)$. Wystarczy teraz sprawdzić, dla jakiego m wektory BA' i $A'C$ są równe. Otrzymujemy $m=-8/3$. W takim razie $B=(4,-5)$ oraz $C=(1,3)$.

7. Tak. Postawmy sześcian o podstawie $ABCD$ (drugą podstawę oznaczmy jako $A'B'C'D'$, przy czym AA', BB', CC', DD' są krawędziami bocznymi sześcianu) na podłodze i oświetlmy go wiązką prostopadłą do podłogi. Załóżmy też, że sześcian ma krawędź długości 1. Jeśli uniesiemy sześcian, to na podłodze uzyskamy cień w kształcie kwadratu. Jeżeli teraz obrócimy sześcian względem przekątnej podstawy AC o kąt ostry, cień będzie sześciokątem o czterech bokach równej długości a, gdzie a jest długością cienia krawędzi podstawy AB, i jednej parze równoległych boków równej długości b, gdzie b jest długością cienia krawędzi bocznej AA'. Gdy kąt obrotu zmienia się od 0° do 90°, a zmienia się od 1 do $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a b od 0 do 1, zatem dla pewnego kąta $a=b$.

8. Jedyne możliwe cyfry tej liczby to 1, 3 oraz 9. Niech liczba ta ma a cyfr 1, b cyfr 3 oraz c cyfr 9. Wtedy $3^{100} = 1^a 3^b 9^c$, zatem $b + 2c = 100$. Co więcej, $a > 0$. Gdyby bowiem w zapisie liczby n nie było cyfry 1 (tylko same cyfry 3 i 9), to liczba ta byłaby podzielna przez 3. Suma cyfr liczby n wynosi $a+3b+9c = a+3\cdot 100+3c \geqslant a+300 > 300$, co było do pokazania.

9. Przypuśćmy, że w wyścigu startuje $n \geqslant 3$ koni. Wtedy wszystkich możliwych kolejności pojawienia się koni na mecie jest $n!$, natomiast kolejności, w których dwa pierwsze konie należą do pana Mieczysława, jest $3 \cdot 2 \cdot (n-2)!$. Wystarczy zatem rozwiązać nierówność $\frac{3\cdot 2\cdot (n-2)!}{n!} \geqslant 0,2$, która po uproszczeniu przyjmuje postać $n(n-1) \leqslant 30$. Zatem w wyścigu nie może być więcej niż 6 koni (w tym 3 konie pana Mieczysława).

10. Oznaczmy średnią prędkość pociągu przed zmianą rozkładu jazdy przez v (kilometrów na godzinę). Wówczas prędkość po zmianie rozkładu wynosi $v-17$, a warunki zadania można zapisać równaniem $\frac{204}{v}+2 = \frac{204}{v-17}$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie kwadratowe $v^2 - 17v - 102\cdot 17 = 0$, które ma tylko jedno rozwiązanie dodatnie: $v = 51$. W takim razie średnia prędkość pociągu przed zmianą rozkładu jazdy wynosiła 51 km/h.