

## POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

### RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Na stole w pierwszym stosie są 22 żetony, a w drugim – 21 żetonów. Gracze  $A$  i  $B$  wykonują na przemian ruchy polegające na zabieraniu z jednego stosu żetonów, przy czym gracz  $A$  rozpoczyna grę i w każdym ruchu zabiera jeden żeton z pierwszego stosu albo dwa żetony z drugiego. Natomiast gracz  $B$  przeciwnie, w każdym ruchu zabiera dwa żetony z pierwszego stosu albo jeden z drugiego. Przegrywa ten gracz, który zabierze ostatni żeton ze stołu. Czy któryś z graczy może wykonywać swoje ruchy tak, aby zapewnić sobie zwycięstwo?
2. W trójkącie  $ABC$  wysokość i środkowa dzielą kąt  $ACB$  na trzy równe kąty  $\alpha$ . Oblicz kąt tego trójkąta.
3. Pokaż, że pole trójkąta o bokach długości  $a, b$  nie jest większe niż  $\frac{a^2+b^2}{4}$ .
4. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:  $x^2 + y^2 = 2019$ .
5. Pokaż, że liczba  $n^3 - 9n + 27$  nie jest podzielna przez 81 dla żadnej liczby naturalnej  $n$ .
6. W trapezie wszystkie wierzchołki są odległe o 1 od środka jednej z podstaw, a druga podstawa ma długość  $\sqrt{3}$ . Jakie są długości ramion tego trapezu?
7. Rozwiąż nierówność:  $\sqrt{2x - 1 - x^2} \leq \sqrt[2000]{x}$ .
8. Danych jest pięć niewspółliniowych punktów w przestrzeni. Ile płaszczyzn przechodzi przez co najmniej trzy niewspółliniowe z tych punktów? Rozważ wszystkie przypadki.
9. Ze zbioru  $\{-10, \dots, -1, 1, \dots, 10\}$  wybieramy dowolnie 12 różnych liczb. Pokaż, że wśród nich istnieją cztery takie, których suma jest równa zero.
10. Statek wyrusza z biegiem rzeki z przystani  $A$  do przystani  $B$  odległej od  $A$  o 70 km. Po upływie godziny wyrusza za nim łódź motorowa, dopędza statek w połowie drogi, po czym wraca do przystani  $A$  w tym samym momencie, w którym statek przybija do przystani  $B$ . Wyznacz prędkość statku i łodzi na wodzie stojącej, wiedząc, że prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/godz.