POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II

1. Na stole w pierwszym stosie są 22 żetony, a w drugim – 21 żetonów. Gracze A i B wykonują na przemian ruchy polegające na zabieraniu z jednego stosu żetonów, przy czym gracz A rozpoczyna grę i w każdym ruchu zabiera jeden żeton z pierwszego stosu albo dwa żetony z drugiego. Natomiast gracz B przeciwnie, w każdym ruchu zabiera dwa żetony z pierwszego stosu albo jeden z drugiego. Przegrywa ten gracz, który zabierze ostatni żeton ze stołu. Czy któryś z graczy może wykonywać swoje ruchy tak, aby zapewnić sobie zwycięstwo?

2. W trójkącie ABC wysokość i środkowa dzielą kąt ACB na trzy równe kąty α. Oblicz kąty tego trójkąta.

3. Pokaż, że pole trójkąta o bokach długości a, b nie jest większe niż $\frac{a^2+b^2}{4}$.

4. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie: $x^2 + y^2 = 2019$.

5. Pokaż, że liczba $n^3 - 9n + 27$ nie jest podzielna przez 81 dla żadnej liczby naturalnej n.

6. W trapezie wszystkie wierzchołki są odległe o 1 od środka jednej z podstaw, a druga podstawa ma długość $\sqrt{3}$. Jakie są długości ramion tego trapezu?

7. Rozwiąż nierówność: $\sqrt{2x - 1 - x^2} \leqslant \sqrt[2000]{x}$.

8. Danych jest pięć niewspółliniowych punktów w przestrzeni. Ile płaszczyzn przechodzi przez co najmniej trzy niewspółliniowe z tych punktów? Rozważ wszystkie przypadki.

9. Ze zbioru $\{-10, \ldots, -1, 1, \ldots, 10\}$ wybieramy dowolnie 12 różnych liczb. Pokaż, że wśród nich istnieją cztery takie, których suma jest równa zero.

10. Statek wyrusza z biegiem rzeki z przystani A do przystani B odległej od A o 70 km. Po upływie godziny wyrusza za nim łódź motorowa, dopędza statek w połowie drogi, po czym wraca do przystani A w tym samym momencie, w którym statek przybija do przystani B. Wyznacz prędkość statku i łodzi na wodzie stojącej, wiedząc, że prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/godz.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Drugi gracz może zapewnić sobie zwycięstwo. Jeżeli drugi gracz będzie brał żetony z tego samego stosu co pierwszy, to po każdych dwóch ruchach z jednego ze stosów ubędą trzy żetony. Jeśli tylko będzie to w każdym ruchu możliwe, to po 28 ruchach zostanie na stole jeden żeton, żeton ten musi znajdować się w pierwszym stosie i ruch będzie należał do pierwszego gracza, więc on przegra. Jeżeli jednak gracz A zabierze ostatni żeton z pierwszego stosu przed końcem gry (na co B nie będzie mógł odpowiedzieć wzięciem dwóch żetonów z pierwszego stosu!), to w drugim stosie zostanie ilość żetonów podzielna przez 3. Ponieważ w takim momencie następny ruch wykonuje gracz B, łatwo wywnioskować, że i w tej sytuacji ostatni ruch wykona gracz A.

2. Niech D będzie spodkiem wysokości, a M – środkiem boku AB. Wtedy łatwo zauważyć, że $\mathrm{tg}2\alpha = 3\mathrm{tg}\alpha$, stąd $\mathrm{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$, czyli $\alpha = 30°$. Można teraz wywnioskować, że trójkąt ten ma kąty: $90°, 60°, 30°$.

3. Największe pole, równe $\frac{ab}{2}$, otrzymamy, gdy podane boki są prostopadłe. Ale
$$\frac{ab}{2} \leqslant \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}{2} = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

4. Kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 3, zatem liczby x, y są obie podzielne przez 3, skąd mamy, że x^2+y^2 dzieli się przez 9. Jednak 2019 nie jest podzielne przez 9, czyli rozważane równanie nie posiada rozwiązań całkowitych.

5. Załóżmy, że $81|n^3-9n+27 = n(n^2-9)+27$. Wówczas liczba n musi być podzielna przez 3. Niech $n=3k$, wtedy $81|27k^3-27k+27$, stąd $3|k^3-k+1$, a to nie jest możliwe, o czym można się przekonać, rozważając reszty z dzielenia przez 3. Sprzeczność dowodzi tezy.

6. Łatwo można zauważyć, że trapez jest równoramienny, długość większej podstawy wynosi 2, a odcinki łączące środek dłuższej podstawy z końcami krótszej dzielą trapez na trzy trójkąty równoramienne o ramionach długości 1 i kątach między ramionami: jeden o kącie 120° i dwa o kącie 30°. Zadanie sprowadza się do policzenia długości trzeciego boku trójkąta o dwóch bokach długości 1 i kącie 30° między nimi. Można zastosować twierdzenie kosinusów lub podzielić trójkąt na dwa wysokością opuszczoną z końca trzeciego boku. Oczywiście wymiary większego z trójkątów to: $1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do mniejszego trójkąta, otrzymamy szukaną długość $\sqrt{(1-\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

7. Pierwiastek po lewej stronie określony jest wyłącznie dla $x=1$. Wówczas nierówność jest prawdziwa.

8. Oczywiście wszystkie punkty mogą leżeć na jednej płaszczyźnie. Jeżeli nie, to możliwe są następujące przypadki:

   a) Trzy punkty (oznaczmy je: A, B, C) leżą na jednej prostej, pozostałe dwa (oznaczmy je: X, Y) leżą na prostej do niej skośnej. Wtedy szukanych płaszczyzn jest 5: $ABCX$, $ABCY$, AXY, BXY, CXY.

   b) Żadne trzy punkty nie są współliniowe, ale cztery z nich leżą na jednej płaszczyźnie, na której nie leży piąty z nich. Wtedy oprócz wymienionej płaszczyzny jest sześć szukanych płaszczyzn, każda z nich wyznaczona przez piąty punkt i dwa z czterech pozostałych.

c) Żadne cztery punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie, wtedy każda trójka z rozważanych punktów wyznacza inną płaszczyznę, zatem szukanych płaszczyzn jest 10.

Szukanych płaszczyzn może być 1, 5, 7 lub 10.

9. Mamy 10 par liczb postaci $\{-k, k\}$, gdzie $k \in \{1, ..., 10\}$. Przy wyborze 12 liczb wiemy, że musieliśmy wybrać przynajmniej dwie pary: $\{-a, a\}$ oraz $\{-b, b\}$ gdzie $a \neq b$. Suma tych czterech liczb daje 0.

10. Niech v_l, v_s oznaczają prędkość łodzi i statku. "Po spotkaniu": $v_l - 2 = v_s + 2$. "Przed spotkaniem": łódź pokonała 35 km w czasie $\frac{35}{v_l+2}$, statek potrzebował na to o godzinę więcej, co daje równanie
$$\frac{35}{v_l + 2} + 1 = \frac{35}{v_s + 2}.$$
Odp.: $v_s = 8, v_l = 12$ (wychodzi proste równanie kwadratowe).