POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III

1. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że $(22n)^{100}$ oraz $(14n)^{200}$ mają te same cyfry jedności.
2. Wyrażenie $\sqrt{8+\sqrt{n+64}}$ jest liczbą naturalną dla pewnej liczby dodatniej n. Pokaż, że n jest liczbą naturalną podzielną przez 3 i większą od $3\sqrt{2018}$.
3. Czy istnieją liczby całkowite a, b, c takie, że zapis każdej z liczb ab, bc, ca kończy się cyframi 40?
4. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie E, dzieląc bok BC w stosunku $2:1$ (licząc od wierzchołka B). Oblicz miary kątów trójkąta ABC.
5. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c i polu S. Pokaż, że $8S^3 < (abc)^2$.
6. Ile jest liczb mniejszych od 10000 o sumie cyfr równej 30?
7. Rozstrzygnij, czy iloczyn dwóch funkcji rosnących musi być funkcją rosnącą.
8. Przekrój sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1 zawiera wierzchołek A oraz środki krawędzi BB' i CC'. Oblicz pole tego przekroju.
9. Królewna Śnieżka napisała list do każdego z siedmiu krasnoludków, ale włożyła je do kopert z adresami przypadkowo. Jaka jest szansa, że dokładnie czterech krasnoludków dostanie listy przeznaczone dla nich?
10. Pokaż, że równanie $x^8 = 4x^2 + 1$ posiada dokładnie dwa rozwiązania.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jeśli n dzieli się przez 10, to ostatnią cyfrą obu liczb będzie 0. Dalej wystarczy zauważyć, że czwarta potęga dowolnej liczby parzystej, ale niepodzielnej przez 10, ma ostatnią cyfrę równą 6, a wykładniki są podzielne przez 4.

2. Oznaczmy $k = \sqrt{8 + \sqrt{n+64}}$, wtedy $n = k^4 - 16k^2 = k^2(k-4)(k+4)$. Stąd wynika, że liczba n jest naturalna i podzielna przez 3, bo k, $k-4$ i $k+4$ dają z dzielenia przez 3 różne reszty.
   Ponieważ $n > 0$, to $k \geqslant 5$, zatem $n \geqslant 5^2 \cdot 1 \cdot 9 = 225 > 3 \cdot 64 > 3 \cdot \sqrt{2^{11}} > 3 \cdot \sqrt{2018}$.

3. Nie. Gdyby takie liczby istniały, to każda z liczb ab, bc, ca dzieliłaby się przez 5, ale nie przez 25. Ponieważ ab dzieli się przez 5, to jeden z czynników, powiedzmy a, dzieli się przez 5, ale drugi, czyli b, nie dzieli się przez 5. Analogicznie wnioskujemy, że c nie dzieli się przez 5. Daje to sprzeczność z założeniem, że bc dzieli się przez 5.

4. Te kąty to: $30°, 60°, 90°$. Z twierdzenia o dwusiecznej $AB = 2AC$. Można też zauważyć, że trójkąty ABC i EAC są podobne, ponieważ mają równe kąty. Stąd otrzymujemy, że $BC = AC\sqrt{3}$. To oznacza, że trójkąt ABC ma proporcje znane z połówki trójkąta równobocznego.

5. Ponieważ $S \leqslant \frac{ab}{2}$, $S \leqslant \frac{bc}{2}$, $S \leqslant \frac{ca}{2}$, tezę „prawie” otrzymamy, mnożąc te nierówności stronami. Trzeba jeszcze zauważyć, że równość może zachodzić najwyżej w jednej z nich, gdyż oznacza ona prostopadłość sąsiednich boków trójkąta.

6. Są 84 takie liczby. Suma czterech dziewiątek wynosi 36, a tu ma brakować sześciu. Jeśli potraktujemy dziewiątki jak cztery pudełeczka, do których wrzucamy sześć nieodróżnialnych kuleczek (-1), to liczbom odpowiadają takie ciągi, w których 6 zer jest porozdzielane trzema jedynkami, np. 000100110 odpowiada liczbie 6798 (zabraliśmy 3 jednostki z pierwszej dziewiątki, dwie z drugiej i jedną z czwartej). Takich ciągów jest $\binom{9}{3} = 84$.

7. Nie. Przykładowo, $f(x) = x$ jest funkcją rosnącą, a $g(x) = f(x) \cdot f(x) = x^2$ – nie jest.

8. Pole tego przekroju jest równe $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ponieważ odcinek MN łączący środki krawędzi BB' i CC' jest równoległy do płaszczyzny podstawy, to przekrój zawiera również wierzchołek D i jest równoległobokiem, a nawet prostokątem, bo MN jest prostopadły do płaszczyzny $ABB'A'$, a więc również do AM. Jego pole to zatem iloczyn długości boków, czyli $1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$.

9. Wszystkich możliwości przypisania krasnoludków listom jest 7!. Ustalmy czterech krasnoludków, którzy dostali właściwe listy – wtedy trzej pozostali dostali niewłaściwe. Łatwo zauważyć, że nieprawidłowe umieszczenie listów w trzech kopertach może być wykonane na dwa sposoby. Ponieważ trzech krasnoludków można wybrać na $7 \cdot 6 \cdot 5/3! = 35$ sposobów, szukana szansa to $\frac{35 \cdot 2}{7!} = 1/72$.

10. Podstawiając $t = x^{-2}$, otrzymujemy równanie $1 = 4t^3 + t^4$. Posiada ono dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, bo prawa strona równania jest rosnąca na $\langle 0, \infty)$. Stąd łatwo wynika teza.
    Drugi sposób: bardziej standardowe podstawienie $t = x^2$ prowadzi do badania rozwiązań równania $f(t) := t^4 - 4t - 1 = 0$ w liczbach dodatnich. Lewa strona nie jest rosnąca, ale można stwierdzić, używając pochodnej, że maleje od $f(0) = -1$ do jedynego minimum w $x = 1$, a dalej rośnie, przecinając oś Ox gdzieś pomiędzy 1 a 2, bo $f(2) = 7 > 0$.