

POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ

1. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \sin 2x + 1$, na przedziale $[0, 2\pi]$.
2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n część całkowita liczby $(2 + \sqrt{3})^n$ jest liczbą nieparzystą.
3. Z przystani A wyrusza z biegiem rzeki statek do przystani B odległej o 140 km. Po upływie 1 godziny wyrusza za nim łódź motorowa i dopędza statek 40 km od przystani A . W momencie spotkania statek zawraca i przybija do przystani A w tym samym momencie, w którym łódź przybija do przystani B . Wyznaczyć prędkość statku i prędkość łodzi na wodzie stojącej, wiedząc, że obie te prędkości mają wartość większą niż 10 km/godz., a prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/godz.
4. W czworościan foremny o krawędzi $\sqrt{6}$ wpisano kulę. Następnie poprowadzono płaszczyznę równoległą do ścian czworościanu i styczne do wpisanej kuli odcinając w ten sposób cztery narożne czworościany foremne. Z każdym z odciętych czworościanów postępujemy podobnie, tzn. wpisujemy kulę, a następnie odcinamy narożne czworościany. Proces ten powtarzamy nieskończenie. Oblicz sumę objętości wszystkich wpisanych kul.
5. Wykaż, że dla ciągu $a_n = \sqrt{n}$ zachodzi: przy dowolnym naturalnym n część całkowita sumy $a_n + a_{n+1}$ jest równa części całkowitej wyrazu a_{4n+2} .
6. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna, której kwadrat w zapisie dziesiętnym kończy się czterema czwórkami.
7. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych (p, q, r) , które spełniają równanie
$$3p^4 - 4q^2 - 5r^4 = 26.$$
8. Niech x, y, z będą dodatnie i spełniają równość $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 7$. Udowodnij, że
$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2} + \sqrt{y^2 + z^2 + 2} + \sqrt{z^2 + x^2 + 2} \geq 6$$
9. Punkty A i B leżą na okręgu ω , a styczne do tego okręgu przechodzące przez A i B przecinają się w punkcie P . Środkowa AM trójkąta PAB przecina okrąg ω w punkcie C , a prosta PC ponownie przecina okrąg w punkcie D . Udowodnij, że trójkąt ABD jest równoramienny.
10. Bok AB sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 1 i leży na osi Ox , a wierzchołki C, D, E, F leżą na wykresie pewnej funkcji kwadratowej. Ile wynosi różnica między miejscami zerowymi tej funkcji?