POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ

1. Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \sin 2x + 1$, na przedziale $[0, 2\pi]$.

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n część całkowita liczby $(2+\sqrt{3})^n$ jest liczbą nieparzystą.

3. Z przystani A wyrusza z biegiem rzeki statek do przystani B odległej o 140 km. Po upływie 1 godziny wyrusza za nim łódź motorowa i dopędza statek 40 km od przystani A. W momencie spotkania statek zawraca i przybija do przystani A w tym samym momencie, w którym łódź przybija do przystani B. Wyznaczyć prędkość statku i prędkość łodzi na wodzie stojącej, wiedząc, że obie te prędkości mają wartość większą niż 10 km/godz., a prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/godz.

4. W czworościan foremny o krawędzi $\sqrt{6}$ wpisano kulę. Następnie poprowadzono płaszczyzny równoległe do ścian czworościanu i styczne do wpisanej kuli odcinając w ten sposób cztery narożne czworościany foremne. Z każdym z odciętych czworościanów postępujemy podobnie, tzn. wpisujemy kulę, a następnie odcinamy narożne czworościany. Proces ten powtarzamy nieskończenie. Oblicz sumę objętości wszystkich wpisanych kul.

5. Wykaż, że dla ciągu $a_n = \sqrt{n}$ zachodzi: przy dowolnym naturalnym n część całkowita sumy $a_n + a_{n+1}$ jest równa części całkowitej wyrazu a_{4n+2}.

6. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna, której kwadrat w zapisie dziesiętnym kończy się czterema czwórkami.

7. Znajdź wszystkie trójki liczb pierwszych (p, q, r), które spełniają równanie
$$3p^4 - 4q^2 - 5r^4 = 26.$$

8. Niech x, y, z będą dodatnie i spełniają równość $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 7$. Udowodnij, że
$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2} + \sqrt{y^2 + z^2 + 2} + \sqrt{z^2 + x^2 + 2} \geqslant 6$$

9. Punkty A i B leżą na okręgu ω, a styczne do tego okręgu przechodzące przez A i B przecinają się w punkcie P. Środkowa AM trójkąta PAB przecina okrąg ω w punkcie C, a prosta PC ponownie przecina okrąg w punkcie D. Udowodnij, że trójkąt ABD jest równoramienny.

10. Bok AB sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 1 i leży na osi Ox, a wierzchołki C, D, E, F leżą na wykresie pewnej funkcji kwadratowej. Ile wynosi różnica między miejscami zerowymi tej funkcji?

UNIWERSYTET GDAŃSKI

BEZRUTYNY

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

FINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jest pięć rozwiązań. Równanie to można bowiem zapisać równoważnie
$$\sin x + \cos x = 2\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x.$$
Podstawiając $\sin x + \cos x = t$ dostajemy $t = t^2$, skąd $\sin x + \cos x = 0$ lub $\sin x + \cos x = 1$. Pierwsze z tych równań jest równoważne równaniu $\operatorname{tg} x = -1$, zatem $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$. Drugie z tych równań jest równoważne układowi $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1, \sin x + \cos x > 0$, zatem $\sin x = 0$ i $\cos x = 1$ lub $\cos x = 0$ i $\sin x = 1$, co daje $x = 0$ lub $x = 2\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Liczba $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ jest zawsze całkowita i parzysta. Zauważmy, że do liczby $(2+\sqrt{3})^n$ dodaliśmy liczbę $(2-\sqrt{3})^n \in (0;1)$. Stąd teza.

3. Oznaczmy przez s i m prędkości odpowiednio statku i motorówki. Porównując czasy do spotkania statku z motorówką oraz po spotkaniu otrzymujemy (w km i godz.)
$$\frac{40}{s+2} = \frac{40}{m+2} + 1, \quad \frac{40}{s-2} = \frac{100}{m+2},$$
stąd $\dfrac{40}{s+2} = \dfrac{40}{100}\dfrac{40}{s-2} + 1$, zatem $s^2 - 24s + 108 = 0$, czyli $s = 6$ lub $s = 18$. Ponieważ $s > 10$, to $s = 18$. Łatwo obliczyć, że $m = 38$. Stąd prędkość statku wynosiła 18 km/godz., a motorówki 38 km/godz.

4. Ponieważ krawędź początkowego sześcianu ma długość $a_1 = \sqrt{6}$, to promień pierwszej wpisanej kuli jest równy $r_1 = \frac{1}{2}$, a jej objętość wynosi $V_1 = \frac{\pi}{6}$. Stosunek podobieństwa kolejnych czworościanów wynosi $k = \frac{1}{2}$, czyli stosunek objętości kul w kolejnych czworościanach to $k^3 = \frac{1}{8}$. W takim razie suma objętości kul otrzymanych w n-tym kroku wynosi $V_n = V_1 \cdot (4k^3)^{n-1} = V_1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$. Suma objętości wszystkich kul to
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = V_1 + \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{4}V_1 + \ldots = 2V_1 = \frac{\pi}{3}.$$

5. Ponieważ $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$, to wystarczy pokazać, że dla żadnej liczby całkowitej k nie zachodzi $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leqslant \sqrt{4n+2}$. Gdyby takie k istniało, to mielibyśmy
$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < k^2 \leqslant 4n + 2$$
$$4n(n+1) < (k^2 - (2n+1))^2 \leqslant (2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1,$$
zatem $(k^2 - (2n+1))^2 = (2n+1)^2$, czyli $k^2 = 4n + 2$, co jest niemożliwe.

6. Taka liczba nie istnieje. Załóżmy bowiem, że dla liczby całkowitej n liczba n^2 kończy się czterema czwórkami. Wówczas n jest liczbą parzystą tj. $n = 2m$ i m^2 kończy się co najmniej dwiema jedynkami. Jednak wtedy $m^2 \equiv 3 \pmod 4$, co jest niemożliwe.

7. Rozważając równanie mod 3 otrzymujemy $r^4 - q^2 \equiv 2 \pmod{3}$. Jeśli r nie jest podzielne przez 3, to $r^4 \equiv 1 \pmod{3}$, ale wtedy $q^2 \equiv 2 \pmod{3}$, co nie jest możliwe. W takim razie $r = 3$. Zatem $3p^4 - 4q^2 = 431$. Teraz patrzymy na reszty z dzielenia przez 5. Jeśli p nie jest podzielne przez 5, to $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$, skąd $4q^2 \equiv 2 \pmod{5}$, co nie jest możliwe, a zatem $p = 5$ i wtedy $q = 19$. Jedyną szukaną trójką jest $(5, 19, 3)$.

8. Z podanego warunku wynika, że $(x+1)(y+1)(z+1) = 8$. Łatwo uzasadnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y zachodzi $x^2 + y^2 + 2 \geqslant (x+1)(y+1)$, zatem

$$\sqrt{x^2+y^2+2} + \sqrt{y^2+z^2+2} + \sqrt{z^2+x^2+2} \geqslant$$

$$\sqrt{(x+1)(y+1)} + \sqrt{(y+1)(z+1)} + \sqrt{(z+1)(x+1)} \geqslant 3\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)} = 6.$$

9. Z twierdzenia o siecznych mamy $MB^2 = MC \cdot MA$. Uwzględniając $MB = MP$ otrzymujemy $MP/MC = MA/MP$, a więc $\triangle MPC \sim \triangle MAP$. Stąd $\measuredangle MPC = \measuredangle PAM$, a dalej $\measuredangle PDA = \measuredangle PAM$ z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą. Oznacza to, że proste AD i PB są równoległe. Wobec tego $\measuredangle BAD = \measuredangle PBA = \measuredangle ADB$, ponownie korzystając z tw. o kącie między styczną a cięciwą. A to oznacza, że trójkąt ADB jest równoramienny.

10. Bez straty ogólności możemy założyć, że $A = (-\frac{1}{2}), B = (\frac{1}{2})$ oraz $C = (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D = (\frac{1}{2}, \sqrt{3})$, a wspomniana funkcja kwadratowa wyraża się wzorem $f(x) = -ax^2 + b$. Ponieważ $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$, to $-\frac{a}{4} + b = \sqrt{3}, -a + b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a zatem $a = \frac{2}{\sqrt{3}}, b = \frac{7}{2\sqrt{3}}$. Różnica miejsc zerowych funkcji f wynosi $2\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{7}$.