POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ

1. Florian napisał na tablicy cztery liczby rzeczywiste. Matylda wypisała wszystkie możliwe sumy: $1, 3, 3, 8, 8, 10$ dwóch z tych liczb i starła liczby napisane przez Floriana. Ile wynosił iloczyn startych liczb?

2. Czy częścią wspólną sześcianu i płaszczyzny może być trójkąt prostokątny?

3. Pokaż, że wielomian $W(x) = x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

4. Udowodnij, że liczba n^2+2^n jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n^2 \cdot 2^n+1$ jest podzielna przez 5.

5. Podaj liczbę par liczb całkowitych nieujemnych (y, z) spełniających równanie
$$7^{2019} + y^2 = z^2.$$

6. Cyfry pewnej liczby całkowitej tworzą ciąg rosnący oraz suma i iloczyn tych cyfr są równe. Jaka to liczba?

7. Punkt kwadratu jednostkowego połączono z jego wierzchołkami, dzieląc kwadrat na cztery trójkąty. Czy pola tych trójkątów mogą stanowić ciąg geometryczny o ilorazie różnym od 1?

8. Dany jest 2018-kąt foremny. Ile jest trójkątów prostokątnych, których wierzchołkami są wierzchołki tego wielokąta?

9. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg i zachodzą równości: $BC = CD$, $DE = EF$, $FA = AB$. Wykaż, że pole trójkąta ACE jest połową pola sześciokąta $ABCDEF$.

10. Udowodnij, że prosta symetryczna do środkowej CS trójkąta ABC względem dwusiecznej kąta C tego trójkąta dzieli bok AB na odcinki proporcjonalne do kwadratów długości boków AC i BC.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: ponadgimnazjalny

PÓŁFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$ oznaczają liczby napisane przez Floriana. Najmniejsze sumy to: $x+y=1,\ x+z=3$, a największe to: $z+t=10,\ y+t=8$. Otrzymujemy: $y=1-x,\ z=3-x,\ t=10-z=7+x$. Ostatnie równanie wynika z poprzednich. Potrzebne jest jeszcze jedno równanie. Trzecia najmniejsza suma to $y+z$ lub $x+t$. Niech $y+z=3$, wtedy $4-2x=3$, skąd $x=1/2,\ y=1/2,\ z=5/2,\ t=15/2$. Sprawdzamy, że ten układ daje sumy wypisane przez Matyldę. Załóżmy teraz, że $x+t=3$, wtedy $2x+7=3$, zatem $x=-2,\ y=3,\ z=t=5$. Szukany iloczyn liczb wynosi $75/16$ lub -150.

2. Nie. Jeżeli przekrojem sześcianu płaszczyzną jest trójkąt, to przecina ona krawędzie sześcianu o wspólnym wierzchołku A. Punkty przecięcia krawędzi oznaczmy: X, Y, Z. Mamy $XY^2+YZ^2=XA^2+YA^2+YA^2+ZA^2>XA^2+ZA^2=XZ^2$. Oznacza to, że kąt XYZ jest ostry. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe kąty trójkąta XYZ są ostre.

3. Przedstawienie w postaci $W(x)=x^3(x-1)(x+1)^2+x^2-x+1$ pokazuje, że wielomian W jest z pewnością dodatni poza $(0,1)$. Z kolei przedstawienie postaci $W(x)=x^5+\frac{1}{2}(x^6-2x^4+x^2+x^6-2x^3+1+x^2-2x+1)=x^5+\frac{1}{2}((x^3-x)^2+(x^3-1)^2+(x-1)^2)$ pokazuje, że dla dodatnich x mamy $W(x)>0$.

4. Widać, że jeśli n jest podzielne przez 5, to żadna z powyższych liczb nie jest. Możemy więc zakładać, że n nie dzieli się przez 5, a wtedy n^4 daje z dzielenia przez 5 resztę 1.

   Jeśli $5|n^2+2^n$, to $5|n^4+n^2\cdot 2^n$ co oznacza, że $5|n^2\cdot 2^n+1$. Jeśli zaś $5|n^2\cdot 2^n+1$, to liczba $n^2\cdot 2^n+n^4=n^2(2^n+n^2)$ też dzieli się przez 5, a więc również 2^n+n^2 musi być podzielne przez 5.

5. Odpowiedź: 1010. Zapisujemy równanie jako $7^{2019}=(z-y)(z+y)$. Jeśli zapiszemy $2019=2n+k$, gdzie $n,k\geqslant 0$, to możemy zamienić równanie na układ równań $z-y=7^n$, $z+y=7^{n+k}$. Ma on jednoznaczne rozwiązanie będące parą liczb całkowitych dodatnich. Takie przedstawienie liczby 2019 mamy dla $n=0,1,\dots 1009$. Jest ich więc dokładnie 1010.

6. Niech liczba ta będzie n-cyfrowa $(1<n\leqslant 9)$. Wtedy iloczyn cyfr wynosi co najmniej $n!$, a suma – mniej niż $9n$, zatem $n!<9n$, co daje $n\leqslant 4$.

   Niech $n=4$. Ponieważ największa możliwa suma cyfr wynosi $6+7+8+9=30$, to pierwszą cyfrą jest 1. W przeciwnym przypadku iloczyn cyfr byłby nie mniejszy niż $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Podobnie, drugą cyfrą jest 2, bo inaczej iloczyn cyfr wynosiłby co najmniej $3\cdot4\cdot5=60>30$. Oznaczmy następne cyfry przez a,b, gdzie $a<b$. Wówczas $1+2+a+b=2ab$, skąd $(2a-1)b=a+3$. Równanie to nie ma rozwiązań całkowitych takich, że $3\leqslant a<b\leqslant 9$.

   Rozważmy przypadek $n=2$. Jeżeli pierwszą cyfrą jest 1, to suma cyfr jest większa o 1 od ich iloczynu. Jeśli natomiast pierwsza cyfra jest większa od 1, to skoro suma cyfr jest mniejsza od podwojonej większej cyfry, jest także mniejsza od iloczynu cyfr.

   Pozostał przypadek $n=3$. Jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 1, to najmniejszy możliwy iloczyn cyfr jest dla liczby 234 i wynosi on 24, natomiast największą sumę, równą także 24, otrzymamy dla liczby 789. Wynika z tego, że pierwszą cyfrą jest 1. Oznaczając pozostałe cyfry przez a, b, otrzymujemy $1 + a + b = ab$, stąd $(a-1)(b-1) = 2$, czyli $a = 2,\ b = 3$. Szukaną liczbą jest 123.

7. Nie jest to możliwe. Niech bowiem a, b, c, d będą wysokościami rozważanych trójkątów, opuszczonymi na boki kwadratu (pola trójkątów są zatem połowami tych liczb), przy czym a jest najkrótszą, a b i d leżą na jednej prostej oraz $b < d$. Mamy $a + c = b + d = 1$. Jeżeli wysokości stanowią ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$, to muszą być ustawione w kolejności a, b, d, c. Stąd $b = aq,\ d = aq^2,\ c = aq^3$, zatem $0 = a + c - b - d = a(1 + q^3 - q - q^2) = a(q-1)(q^2-1)$. Oznacza to, że $q = 1$.

8. Każdy taki trójkąt ma dwa wierzchołki będące przeciwległymi wierzchołkami danego wielokąta. Jeżeli ponumerujemy wierzchołki wielokąta kolejno liczbami 1, 2,..., 2018, to jasnym będzie, że liczba szukanych trójkątów to liczba trójek $(i, i + 1009, j)$ takich, że $1 \leqslant i \leqslant 1009,\ 1 \leqslant j \leqslant 2018,\ j \neq i,\ j \neq i + 1009$. Zatem dla każdego i mamy 2016 możliwych wartości j. Szukana liczba to $1009 \cdot 2016$.

9. Najpierw zauważmy, że środek O okręgu opisanego leży wewnątrz sześciokąta, gdyż w przeciwnym razie bok sześciokąta znajdujący się najbliżej O byłby jedynym najdłuższym bokiem. Oznaczając kąty środkowe oparte na łukach AB, BC i DE odpowiednio przez α, β i γ oraz przyjmując promień okręgu R, otrzymamy pole sześciokąta równe sumie pól trójkątów: AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, czyli $R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Pole trójkąta ACE wynosi zaś $\frac{1}{2}R^2\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha)\right)$. Korzystając z tego, że $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, mamy $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ itp., a więc otrzymujemy tezę.

10. Niech CM będzie prostą symetryczną do środkowej CS względem dwusiecznej CD kąta C trójkąta ABC (taką prostą nazywa się czasem symedianą).

   Ponieważ pola trójkątów o tej samej wysokości są proporcjonalne do podstaw tych trójkątów, więc
$$\frac{P_{ACM}}{P_{SCB}} = \frac{AM}{SB}, \qquad \frac{P_{ACS}}{P_{MCB}} = \frac{AS}{MB}.$$
   Z równości $\measuredangle ACD = \measuredangle DCB$ i $\measuredangle MCD = \measuredangle DCS$ wynika, że $\measuredangle ACM = \measuredangle SCB$, a $\measuredangle ACS = \measuredangle MCB$. Pola trójkątów mających jedną parę równych kątów są proporcjonalne do iloczynów boków tworzących te kąty, zatem
$$\frac{P_{ACM}}{P_{SCB}} = \frac{AC \cdot MC}{SC \cdot BC}, \qquad \frac{P_{ACS}}{P_{MCB}} = \frac{AC \cdot SC}{MC \cdot BC}.$$
   Z powyższych równości wynika, że
$$\frac{AM}{SB} = \frac{AC \cdot MC}{SC \cdot BC}, \frac{AS}{MB} = \frac{AC \cdot SC}{MC \cdot BC}.$$
   Mnożąc te równości stronami i uwzględniając, że $SB = AS$, otrzymujemy równość
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2},$$
   czyli tezę.