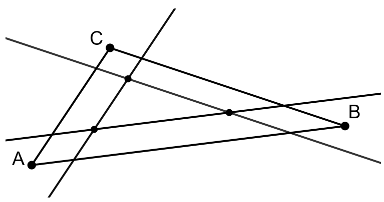
POMORSKIE MECZE MATEMATYCZNE

EDYCJA IV – rok szkolny 2018/2019

poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU

1. Ile należy wziąć liczb naturalnych, jeżeli wiadomo, że zarówno ich suma jak i iloczyn wynoszą 219?
2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Pokaż, że prosta AC dzieli odcinek BD na połowy.
3. Na okręgu o środku w punkcie S wybrano 4 punkty A, B, C i D w taki sposób, że przekątna AC czworokąta $ABCD$ przechodzi przez punkt S. Wiadomo, że kąt $\measuredangle BAC$ jest trzy razy większy od kąta $\measuredangle BDA$. Znajdź miary tych kątów.
4. Grupa pracowników pewnego zakładu zawijała cukierki w papierki przez połowę dnia. Drugą połowę dnia połowa pracowników tej grupy zawijała cukierki w tym samym pomieszczeniu, a druga połowa w innym pomieszczeniu. Następnego dnia tylko jeden pracownik zjawił się w pracy i zawijał cukierki w drugim pomieszczeniu. Okazało się, że w pierwszym pomieszczeniu zawinięto dwa razy więcej cukierków, niż w drugim. Ilu było pracowników w tej grupie, jeżeli wydajność każdego pracownika była taka sama i nie zależała od czasu pracy?
5. Pokaż, że jeżeli $x + y = -2$, to $x(x + 2) = y(y + 2)$.
6. Trójkąt ABC podzielono, jak na rysunku obok, trzema prostymi równoległymi do boków tak, że w środku powstał trójkąt o obwodzie 8, a przylegające do niego trzy trapezy mają obwody $9, 10, 11$. Jaki jest obwód trójkąta ABC?



7. Na okręgu rozmieszczono 2019 punktów i ponumerowano je, poruszając się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, kolejnymi liczbami naturalnymi począwszy od 1. Następnie kolejne punkty oznaczono literami – począwszy od 1, idąc w stronę rosnących numerów: A, B, C, A, B, C, itd. skończywszy na literze C w punkcie oznaczonym numerem 2019. Literożerca Ćmok porusza się po okręgu w kierunku rosnących numerów i zjada po literze A najbliższą literę C, po C literę B, po B literę A itd. Z którego miejsca zostanie zjedzona ostatnia litera, jeżeli Ćmok zaczął zjadanie od miejsca o numerze 1?
8. Adaś, Basia i Jacek przez trzy kolejne Święta Bożego Narodzenia obdarowywali się wzajemnie prezentami. Okazało się, że każdy prezent miał inną cenę, która wyrażała się w pełnych złotych. Ponadto najtańszy prezent dany przez Basię był za 1zł, a najtańszy dany przez Jacka za 12zł. Na wszystkie prezenty Adaś wydał 27zł, Basia 52zł, a Jacek 92zł. Jakiej wartości prezenty były przygotowane przez Adasia, Basię i Jacka?
9. Czy algebraf MA+TEMA+TYKA=MATMA ma rozwiązanie? W przedstawionym zapisie każdej literze odpowiada cyfra, różnym literom odpowiadają różne cyfry a litery zapisane obok siebie oznaczają odpowiednie liczby wielocyfrowe.
10. W Smoczej Krainie żyją smoki mające jedną głowę, smoki mające dwie głowy oraz takie, które mają trzy głowy. Te, które mają dwie głowy zawsze kłamią, a pozostałe zawsze mówią prawdę. Pewnego dnia spotkały się cztery smoki: Drago, Prago, Grago i Krago. Na podstawie ich wypowiedzi ustal, które z nich powiedziały prawdę (wiadomo, że przynajmniej jeden z nich powiedział prawdę!)

    - Drago: razem mamy 5 głów;
    - Prago: razem mamy 6 głów;
    - Grago: razem mamy 7 głów;
    - Krago: razem mamy 8 głów.

PMM – rok szkolny 2018/2019 – poziom: szkoła podstawowa

1/8 FINAŁU – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ $219 = 3 \cdot 73$ i liczba 73 jest pierwsza, to wśród rozważanych liczb znajduje się dokładnie jedna liczba 73 i dokładnie jedna liczba 3, a pozostałe są jedynkami. Oczywiście jedynek jest $219 - 73 - 3 = 143$, zatem wszystkich liczb jest 145.

2. Niech P będzie punktem przecięcia się AC i BD. Wysokości BB' i DD' trójkątów ABC i ADC są równe. Teza wynika z podobieństwa trójkątów PBB' oraz $PD'D$.

3. Zauważmy, że kąt $\measuredangle CBA = 90°$ (jako kąt wpisany oparty na półokręgu). Stąd $\measuredangle ACB = 90° - \measuredangle BAC$. Widzimy jednak również, że $\measuredangle ACB = \measuredangle BDA$ (jako wpisane oparte na tym samym łuku). Stąd $90° - \measuredangle BAC = \measuredangle BDA$, co oznacza, że $4 \cdot \measuredangle BDA = 90°$ a więc $\measuredangle BDA = 22,5°$, zaś $\measuredangle BAC = 67,5°$.

4. Niech n oznacza liczbę pracowników, a d liczbę cukierków zawijanych przez jednego pracownika w czasie dnia pracy. W pierwszym pomieszczeniu zawinięto $n \cdot \frac{d}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{d}{2}$, a w drugim $\frac{n}{2} \cdot \frac{d}{2} + d$ cukierków. Mamy zatem równanie $\frac{3n}{4} = 2(\frac{n}{4} + 1)$, czyli $n = 8$.

5. Mamy $x(x+2) = x(-y) = y(-x) = y(y+2)$.

6. Zauważmy, że obwód trójkąta ABC to suma obwodów trapezów wymienionych w treści zadania, pomniejszona o obwód środkowego trójkąta, zatem wynosi $9 + 10 + 11 - 8 = 22$.

7. W pierwszym okrążeniu Ćmok zjadł co drugą literę i zakończył zjadanie na literze C z miejsca 2019, a niezjedzone pozostały w porządku $BACBAC$..., zatem następne okrążenie skutkuje zjedzeniem wszystkich liter! Jako ostatnia została zjedzona litera B z miejsca 2018.

8. Ponieważ suma liczb $2, 3, 4, 5, 6, 7$ wynosi 27, to stanowią one wartości prezentów Adasia. Podobnie suma liczb $1, 8, 9, 10, 11, 13$ wynosi 52, a suma liczb $12, 14, 15, 16, 17, 18$ wynosi 92. Z tych równości łatwo napisać i uzasadnić rozwiązanie.

9. Algebraf nie ma rozwiązania! Oczywiście musi być $M = 1$. Jeżeli $A = 0$, to $T = 5$, $K = 9$ oraz $E + Y = 4$. Wynika z tego, że E lub Y jest równe 0 lub 1, co przeczy wartościom M i A. Zatem $A = 5$. Mamy stąd $T = 7$, $K = 8$ oraz $E + Y = 16$. Oznacza to, że jedna z liter E, Y ma wartość 7, co przeczy wartości T.

10. Zauważmy, że padły 4 różne odpowiedzi, zatem kłamców jest trzech, a tylko jeden mówi prawdę. Łączna liczba głów musi być nieparzysta i równa co najmniej 7. W takim razie to Grago powiedział prawdę.